

# 3. La mécanique quantique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

La situation géométrique est celle d'une fibration  $F: E \rightarrow X$  et d'une fonction  $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $L_0$  est le graphe de  $d\varphi$  contenu dans  $T^*E$ , on passe de  $L_0$  à  $L$  par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si  $\mathcal{L}: TX \rightarrow \mathbf{R}$  est un lagrangien régulier et  $\Omega_t$  l'ensemble des applications de  $\gamma: [0, t] \rightarrow X$  fibré sur  $X \times X$  par  $\gamma \rightarrow (\gamma(0), \gamma(t))$  et  $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds$ , la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien  $\varphi_t$  associé au lagrangien  $\mathcal{L}$  par la transformée de Legendre. La fonction génératrice  $\Phi$  est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

### 3. LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie); pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint  $\widehat{H}$  (avec domaine) sur  $\mathcal{H}$  grâce à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{du}{dt} = \widehat{H}u,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par :  $U(t) = e^{-it\widehat{H}/\hbar}$ .

La constante  $\hbar$  n'est pas là uniquement pour faire joli, en général  $\widehat{H}$  est une énergie et donc  $\hbar$  a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

EXEMPLE 3.1.  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$  et  $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ . On a alors l'équation de Schrödinger.

EXEMPLE 3.2.  $\mathcal{H} = L^2(X)$  et  $\widehat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$ , où  $\Delta_g$  est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.

EXEMPLE 3.3. Si  $E$  est le fibré anti-canonique sur  $P^n\mathbf{C}$ , on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de  $E^{\otimes N}$  qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré  $N$  sur  $\mathbf{C}^{n+1}$ .

Si  $H: P^n\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ , on considère les opérateurs de Toeplitz  $\widehat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi)$ , où  $\Pi_N$  est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].

La ressemblance entre les exemples de ce paragraphe et du précédent n'est pas fortuite, comme on va le voir.

Il faut aussi remarquer que la mécanique quantique est un cas particulier de la mécanique classique, celui où l'hamiltonien est une forme hermitienne sur un espace de Hilbert. De ce point de vue, il n'est pas très excitant : la dynamique est quasi-périodique, les fréquences fondamentales étant liées de façon simple au spectre de  $\widehat{H}$ .

Les correspondances entre espace des phases classiques et quantiques (flèches entre 2 catégories) peuvent être prolongées de façon heuristique, par exemple correspondance entre volume et dimension, entre variétés lagrangiennes et vecteurs, entre produits et produits tensoriels, entre changement de signe de  $\omega$  et passage au dual.

Pour être plus pédant, on pourrait parler de la catégorie *symplectique* dont les objets sont les variétés symplectiques et les flèches de  $Z$  à  $Z'$  les sous-variétés lagrangiennes de  $(Z \times Z', \omega' - \omega)$  et de la catégorie hilbertienne dont les objets sont les espaces de Hilbert et les flèches les opérateurs unitaires.

On obtient ainsi le tableau de correspondance suivant qu'il est intéressant d'essayer de prolonger !!

CLASSIQUE	QUANTIQUE
$(Z, \omega)$	$\mathcal{H}$
$(T^*X, \omega)$	$L^2(X)$
$L$ lagrangienne	$\varphi \in \mathcal{H}, \ \varphi\  = 1$
$L \subset (Z_1 \times Z_2, \omega_2 - \omega_1)$	$U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$
$\frac{1}{n!} \int_Z \omega^{\wedge n}$	$\dim \mathcal{H}$
$H: Z \rightarrow \mathbf{R}$	$\widehat{H}$ autoadjoint
$\frac{1}{2} \ \xi\ ^2 + V(x)$	$-\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V$
$\frac{1}{2} \sum g^{ij} \xi_i \xi_j$	$\Delta_g$
$\varphi_t$	$e^{-it\frac{H}{\hbar}}$
<i>Legendre</i>	<i>Fourier</i>
<i>Trajectoires périodiques</i>	<i>Fonctions propres</i>
<i>Périodes</i>	<i>Spectre</i>