

## 4.2 La phase stationnaire

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$2(n-1)$  des trajectoires de  $H_0$  contenues dans la couche d'énergie  $E_0$  et la munir de l'hamiltonien moyenné  $K = \frac{1}{T_0} \int_{\gamma} H_1 dt$  décrivant une dynamique sur les trajectoires de  $H_0$ . Cette dynamique décrit bien le comportement des trajectoires de  $H_\varepsilon$  dans un intervalle de temps de l'ordre de 1.

## 4.2 LA PHASE STATIONNAIRE

Voir [36].

Dans le cas qui nous préoccupe dans la suite (linéaire), ce découplage est une conséquence de la phase stationnaire: si on considère une intégrale oscillante du type:

$$I(h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x) |dx|,$$

où  $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est  $C^\infty$  et  $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , le comportement asymptotique de  $I(h)$  quand  $h$  tend vers 0 est contrôlé par les points critiques de  $S$  situés dans le support de  $a$ . Lorsque ceux-ci sont non dégénérés, on a une formule explicite pour le développement asymptotique. Les faits remarquables sont les suivants: le comportement est en  $h^{n/2}$ , il y a une phase liée à l'indice de la hessienne de  $S$  aux points critiques.

Plus précisément, si  $S$  n'a qu'un point critique supposé non dégénéré  $x_0$  dans le support de  $a$  de signature  $\sigma$ , on a:

$$I(h) \sim (2\pi h)^{n/2} e^{iS(x_0)/h} e^{i\sigma\pi/4} \frac{a(x_0)}{|\det(S''(x_0))|^{1/2}}.$$

Le coefficient principal (amplitude) admet une interprétation géométrique comme densité relative de 2 mesures en  $x_0$ : la mesure  $a(x)dx$  et la mesure associée canoniquement à  $S''$  (comme en riemannien). Cette remarque est à l'origine de la géométrisation du calcul des intégrales oscillantes.

Donnons 3 applications semi-classiques simples de la phase stationnaire:

### EXEMPLE 4.1 (FOURIER ET LEGENDRE).

Soit  $S: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $C^\infty$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  et supposons que  $x \rightarrow S'(x)$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $U$  sur un ouvert  $V$  du dual de  $\mathbf{R}^n$ . Soit alors  $\widehat{S}(\xi): V \rightarrow \mathbf{R}$  la transformée de Legendre de  $S$  caractérisée par

$$\{(x, S'(x)) \mid x \in U\} = \{(\widehat{S}'(\xi), \xi) \mid \xi \in V\},$$

normalisée par  $\widehat{S}(\xi_0) + S(x_0) = x_0 \xi_0$  pour un point  $\xi_0 = S'(x_0)$ .

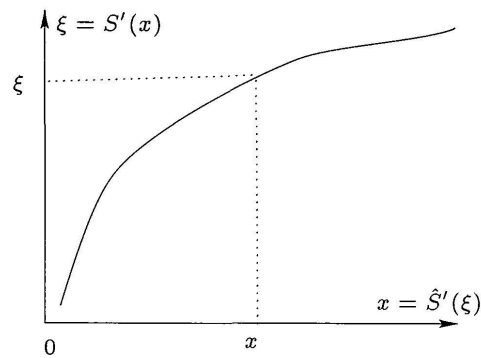


FIGURE 4

Transformation de Legendre

Soit  $a \in C_0^\infty(U)$  et

$$\mathcal{F}_h \phi(\xi) = \int e^{-ix\xi/h} \phi(x) |d_h x|,$$

où  $|d_h x|$  est une mesure de Haar sur  $\mathbf{R}^n$  normalisée pour que  $\mathcal{F}_h$  soit unitaire de  $L^2(\mathbf{R}^n, |d_h x|)$  sur  $L^2(\mathbf{R}^n, |d_h \xi|)$ .

Alors

$$\mathcal{F}_h(a(x) e^{iS(x)/h})(\xi) \sim A(\xi) e^{-iS(\xi)/h},$$

où  $\widehat{S}$  est la transformée de Legendre de  $S$ .

On peut donc dire que la transformée de Legendre est la limite semi-classique de la transformée de Fourier.

EXEMPLE 4.2 (VITESSE DE PHASE ET VITESSE DE GROUPE).

Soit  $a(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$  une onde plane monochromatique de fréquence  $\omega(k)$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Sa vitesse de propagation est  $v = \frac{k \omega(k)}{\|k\|^2}$ . C'est la vitesse de déplacement des hyperplans d'égal phase

$$kx - \omega(k)t = \alpha_0,$$

souvent appelée vitesse de phase.

Si on prend une superposition de telles ondes de la forme

$$F(x, t) = \int a(k) e^{ikx - \omega(k)t} |dk|,$$

avec  $k$  grand, la fonction  $F$  est négligeable en dehors des points  $(x, t)$  tels que  $x = \omega'(k)t$  qui se propagent à la vitesse  $\omega'(k)$  appelée vitesse de groupe du paquet d'onde.

## EXEMPLE 4.3 (PRINCIPE DE HUYGENS).

Considérons une onde sphérique de la forme

$$a(x) e^{ikr}$$

issue de l'origine. Soit maintenant  $\Sigma$  une surface et considérons une superposition d'ondes sphériques émises par les points de  $\Sigma$  de la forme

$$F(M) = \int_{\Sigma} e^{ikd(P,M)} a(P) |dP|.$$

Le comportement asymptotique lorsque  $k$  est grand est négligeable sauf si  $M$  est sur une normale à  $\Sigma$ . La phase est alors donnée à une constante près par

$$kd(A, M) - n(M) \frac{\pi}{2},$$

à condition que  $M$  ne soit pas un point focal, et où  $n(M)$  est l'indice de Morse de la fonction distance.

On voit donc qu'aux grandes fréquences le front d'onde (phases constantes) est l'enveloppe des fronts sphériques issus de  $\Sigma$ , ce qui est le principe de Huygens en optique géométrique.

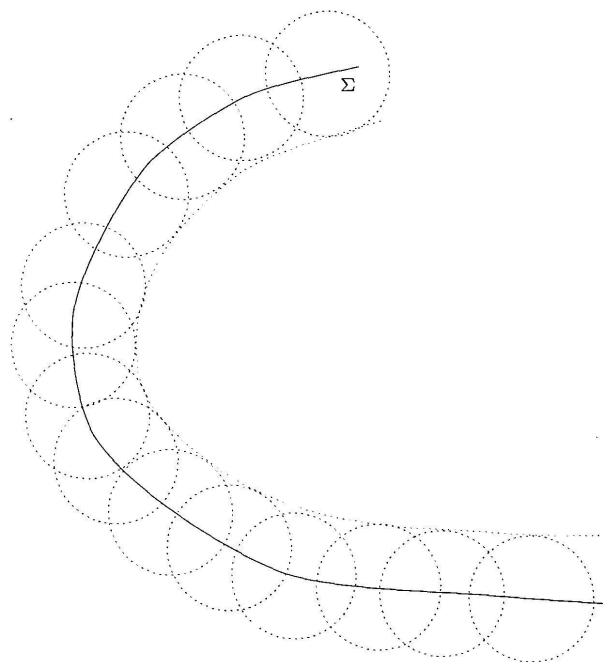


FIGURE 5  
Principe de Huygens