

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 6.1 Densités régularisées  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 6. LE CAS GÉNÉRAL : LA FORMULE DES TRACES SEMI-CLASSIQUES

Dans le cas non complètement intégrable, le calcul approché du spectre est impossible, comme cela a été remarqué par Einstein dans [26]. Dans les années 70 sont apparues de nouvelles méthodes que l'on désignera sous le nom de formules de traces semi-classiques. Il s'agit de formules asymptotiques pour la densité régularisée de valeurs propres. D'abord apparues chez des physiciens (Gutzwiller [30], Balaian et Bloch [5], [6]), ces formules ont été justifiées rigoureusement par les mathématiciens, d'abord dans ma thèse [12], utilisant une approximation de l'intégrale de Feynman, puis dans les travaux qui s'en sont inspirés, ceux de Chazarain [11] et de Duistermaat-Guillemin [23] en utilisant les OIF.

## 6.1 DENSITÉS RÉGULARISÉES

Pour obtenir des renseignements plus fins sur la fonction (discontinue)  $N_h(E)$ , il est agréable de la régulariser (au sens de Schwartz), on pose donc pour une fonction  $\rho$  lisse, d'intégrale 1 et à décroissance rapide :

$$N_\rho(E) = \sum_n \rho(E - E_n).$$

En fait, on utilise souvent une famille

$$\rho_\varepsilon(u) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{u}{\varepsilon}\right).$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $N_{\rho_\varepsilon}(\mu)$  décrit une densité régularisée correspondant à un regroupement de paquets de valeurs propres de largeur  $\sim \varepsilon$ . Autrement dit on observe le spectre avec un grossissement  $1/\varepsilon$ .

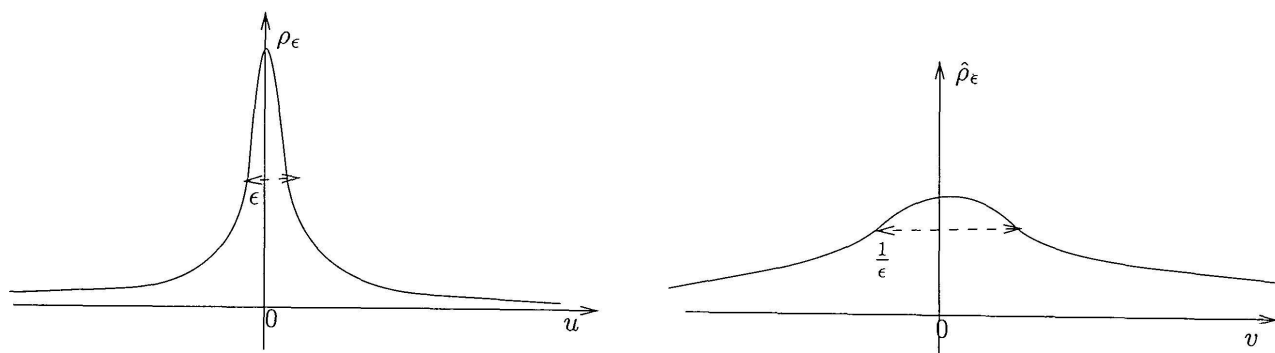


FIGURE 10

La densité spectrale régularisée

Le lien entre la densité régularisée et l'équation de Schrödinger est donné par la formule d'inversion de Fourier: si  $\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu) d\mu$  et  $Z(t) = \text{Trace}(e^{-itH/h})$ , on a:

$$N_{\rho}(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} Z(uh) e^{iu\mu} \widehat{\rho}(u) du.$$

Si on veut une analyse fine  $\rho$  doit être très localisée et cela implique que  $\widehat{\rho}$  est très étalée et donc une connaissance de  $Z(t)$  (et donc de  $U(t)$ ) pour  $t$  grand. A la limite le spectre exact est lié aux solutions périodiques de l'équation de Schrödinger qui sont donc connues pour tout  $t \in \mathbf{R}$ .

Deux échelles sont très importantes,  $\varepsilon = h$  qui correspond du point de vue classique à un intervalle de temps borné et qui prend en compte un nombre de valeurs propres dans un intervalle de longueur  $\sim h$  qui en compte environ  $h^{n-1}$  et l'échelle  $\varepsilon = h^n$  qui correspond à la séparation des niveaux (Weyl) (et donc à une analyse fine du spectre analogue à celle donnée par Bohr-Sommerfeld) et à un temps de l'ordre de  $1/h^{n-1}$ .

La première échelle est une échelle *non universelle* donnée par les formules de traces semi-classique, alors que les échelles plus fines sont (au-delà du semi-classique) le domaine des *classes d'universalités* (GOE, GUE, Poisson) (voir section 7).

L'étude à ces échelles est difficile d'accès par les méthodes semi-classiques qui décrivent mal les asymptotiques simultanées  $\hbar \rightarrow 0$  et  $t \rightarrow \infty$ ; ce phénomène fondamental (et mystérieux) est appelé par certains auteurs *rupture de l'approximation semi-classique*.

La limite semi-classique se décrit bien en termes de l'évolution d'une fonction d'onde localisée de la forme:

$$\Phi_{x_0, p_0}(x) = ce^{-\frac{1}{2\hbar} \|x-x_0\|^2} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x},$$

appelé *état cohérent*. L'évolution semi-classique de  $\Phi$ ,  $U(t)\Phi$ , est donnée lorsque  $t$  reste borné par une fonction d'onde du même type localisée au point  $\varphi_t(x_0, p_0)$  où  $\varphi_t$  est le flot classique. Lorsque  $t$  augmente, cette fonction gaussienne se délocalise en un temps lié à l'exposant de Liapounov  $\lambda$ :

$$T \sim \frac{1}{\lambda} |\ln \hbar|,$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une région initiale de diamètre  $\hbar$  ne soit plus localisée près de la trajectoire classique. Au delà de ce temps la non linéarité de la dynamique classique joue pleinement son rôle et  $U(t)\Phi$  reste localisée sur la variété instable de  $(x_0, p_0)$  qui s'enroule de façon compliquée dans l'espace des phases  $Z$ .