Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Autor: Colin de Verdière, Yves

Kapitel: 6.2 La formule des traces de Selberg

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

6.2 La formule des traces de Selberg

Pour plus de détails sur cette section, voir par exemple l'excellent papier de Hejhal [33]. Le flot géodésique sur les surfaces de Riemann à courbure -1 n'est pas intégrable et on ne peut pas espérer non plus de formules explicites pour le spectre du laplacien. On devra se contenter de formules sommatoires qui généralisent la formule de Poisson.

Prenons l'hamiltonien quantique

$$\widehat{H} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$$

sur le tore de dimension 1, $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Son spectre est formé des nombres $2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ (séries de Fourier).

On a alors la formule suivante, pour $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \rho(\mu - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbf{Z}} \widehat{\rho}(m)\, e^{im\mu} ,$$

où

$$\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu)\, d\mu$$

est la transformée de Fourier de ρ (qui est bien une fonction du temps...). C'est la classique formule sommatoire de Poisson.

On s'intéresse donc à la densité régularisée

$$N_\rho(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n) ,$$

où les valeurs propres du laplacien sont $\lambda_n = \frac{1}{4} + \mu_n^2$.

Motivé par l'analogie avec la fonction ζ de Riemann, A. Selberg a montré en 1956 que, pour des fonctions ρ convenables, $N_\rho(\mu)$ admet une expression exacte comme somme d'un terme régulier non oscillant $N_{TF}(\mu)$ dont la partie principale est donnée par Weyl :

$$N_{TF}(\mu) \sim \frac{\text{Aire}(X)}{2\pi} \mu$$

et de termes oscillants $N_\gamma(\mu)$ associés aux géodésiques périodiques.

L'expression de N_γ est :

$$N_\gamma(\mu) = \widehat{\rho}(L_\gamma)\, c(\gamma)\, e^{i\mu L_\gamma} ,$$

où L_γ est la longueur de la géodésique périodique γ et $c(\gamma)$ est un nombre complexe non nul calculable en termes de la dynamique linéarisée près de γ (application de Poincaré linéarisée, indice de Morse).