Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE T^5

Autor: Hadjar, Amine

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63898

L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 91–93

SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE $\mathbf{T}^5$

par Amine HADJAR *)

ABSTRACT. We give an example of a $\mathbf{T}^2$-invariant contact form on $\mathbf{T}^5$ which is transversal to the trivial fibration with circles over $\mathbf{T}^4$.

RÉSUMÉ. On donne un exemple de forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$, $\mathbf{T}^2$-invariante et transverse à la fibration triviale en cercles au dessus du tore $\mathbf{T}^4$.

D'après Y. Eliashberg et W. Thurston (voir [1]), on sait que sur tout fibré principal en cercles $M \to F$ au dessus d'une surface F de genre non nul, il existe une structure de contact transverse aux fibres [1]). Un exemple simple est le champ de plans défini par la forme différentielle $d\theta + \cos\theta \, d\theta_1 + \sin\theta \, d\theta_2$ sur le tore $\mathbf{T}^3$.

Ces auteurs posent le problème d'existence d'une telle structure en dimensions supérieures, et notamment sur le tore $\mathbf{T}^5$ fibré trivial au dessus de $\mathbf{T}^4$.

Dans cette note, on donne une réponse positive: on montre qu'il existe une forme de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ qui est non seulement transverse aux fibres de la fibration triviale $\mathbf{T}^5 = S^1 \times \mathbf{T}^4 \to \mathbf{T}^4$, mais en plus $\mathbf{T}^2$-invariante. L'action de $\mathbf{T}^2$ considérée est celle du deuxième facteur dans $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^2$.

1. Le premier exemple de structure de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$ a été donné par R. Lutz (voir [2]). Il s'agit du champ de 4-plans défini par la forme

$$\begin{aligned}\omega_0 = (\sin\theta \, \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \, \sin\theta_2) \, d\theta_3 + (\sin\theta \, \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \, \cos\theta_2) \, d\theta_4 \\ + \sin\theta_1 \, \cos\theta_1 \, d\theta - \sin\theta \, \cos\theta \, d\theta_1 + \cos\theta \, \cos\theta_1 \, d\theta_2 \,,\end{aligned}$$

qui est $\mathbf{T}^2$-invariante puisque ses dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs $\partial/\partial\theta_3$ et $\partial/\partial\theta_4$ sont nulles. Ici θ et les θ_i désignent les 5 coordonnées de $\mathbf{R}^5$.

*) Je remercie A. Haefliger pour les discussions fructueuses lors de sa visite à Mulhouse.

[1]) Ce problème est dû à E. Giroux.

2. Posons $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$, pour tout nombre réel t. Alors:

PROPOSITION. *Il existe un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour tout t, $|t| \leq \varepsilon$, la forme $\mathbf{T}^2$-invariante ω_t est de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. De plus, pour $1/2 < |t| \leq \varepsilon$, elle est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2\theta \cos^2\theta_1 + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta \sin^2\theta_1 + \sin^4\theta_1 \\ &\qquad + t\cos\theta_1 \sin\theta_1)\, d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t\sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6\sin^2\theta \sin^2\theta_1) \\ &\qquad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4\end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur $\mathbf{T}^5$ pour $|t| \leq 1$. La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, la forme ω_t reste de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille ω_t, avec $0 \leq t \leq \varepsilon$, est une isotopie de formes de contact $\mathbf{T}^2$-invariantes sur $\mathbf{T}^5$, qui joint ω_0 à ω_ε. Par conséquent, il existe une isotopie φ_t de difféomorphismes $\mathbf{T}^2$-équivariants du tore $\mathbf{T}^5$ telle que φ_0 est l'identité et $\omega_t \wedge \varphi_t^\star \omega_0 = 0$ pour tout t dans $[0, \varepsilon]$ (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par ω_0 est transverse à la fibration en cercles $\mathbf{T}^5 \to \mathbf{T}^4$ dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs $(\varphi_1)_\star \partial/\partial\theta$. Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur $\mathbf{T}^5$ ne peut être $\mathbf{T}^3$-invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact ω sur le tore $\mathbf{T}^5$ ne peut être à la fois S^1-invariante (i.e. telle que $L_{\partial/\partial\theta}\,\omega = 0$) et partout transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$. Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit $M(B, S^1, q)$ un fibré principal dont la base est fermée, de dimension $2p$. Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur M, S^1-invariante et transverse aux fibres.*

Preuve. Soit Z le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de S^1 sur M. Supposons qu'il existe une forme de contact ω sur M, invariante par S^1 et transverse aux fibres. Alors $\alpha = \omega/\omega(Z)$ est une forme de connexion telle que $\alpha(Z) = 1$ et $i(Z)d\alpha = 0$. La forme de courbure correspondante venant de la base, il existe une 2-forme Ω sur B telle que $d\alpha = q^\star\Omega$. Comme $\alpha \wedge (d\alpha)^p = \alpha \wedge q^\star(\Omega^p)$ est une forme volume sur M (puisque α est de contact), Ω^p est une forme volume sur B. Par suite, la classe de cohomologie de Ω est non nulle, ce qui contredit l'hypothèse de nullité sur la classe caractéristique du fibré.

RÉFÉRENCES

[1] ELIASHBERG, Y. and W. THURSTON. *Confoliations.* University Lecture Series, 13. Amer. Math. Soc. (1998).

[2] LUTZ, R. Sur la géométrie des structures de contact invariantes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 29* (1979), 283–306.

(Reçu le 27 janvier 1998)

Amine Hadjar

Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F-68093 Mulhouse Cedex
France
e-mail: A.Hadjar@univ-mulhouse.fr

vide-leer-empty