

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. Posons  $\omega_t = \omega_0 + td\theta$ , pour tout nombre réel  $t$ . Alors :

PROPOSITION. *Il existe un réel  $\varepsilon > 1$  tel que pour tout  $t$ ,  $|t| \leq \varepsilon$ , la forme  $\mathbf{T}^2$ -invariante  $\omega_t$  est de contact sur le tore  $\mathbf{T}^5$ . De plus, pour  $1/2 < |t| \leq \varepsilon$ , elle est transverse au champ de vecteurs  $\partial/\partial\theta$ .*

*Preuve.* Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_1 + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 + \sin^4 \theta_1 \\ &\quad + t \cos \theta_1 \sin \theta_1) d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t \sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1) \\ &\quad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur  $\mathbf{T}^5$  pour  $|t| \leq 1$ . La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel  $\varepsilon > 1$  tel que pour  $|t| \leq \varepsilon$ , la forme  $\omega_t$  reste de contact sur le tore  $\mathbf{T}^5$ . La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille  $\omega_t$ , avec  $0 \leq t \leq \varepsilon$ , est une isotopie de formes de contact  $\mathbf{T}^2$ -invariantes sur  $\mathbf{T}^5$ , qui joint  $\omega_0$  à  $\omega_\varepsilon$ . Par conséquent, il existe une isotopie  $\varphi_t$  de difféomorphismes  $\mathbf{T}^2$ -équivalents du tore  $\mathbf{T}^5$  telle que  $\varphi_0$  est l'identité et  $\omega_t \wedge \varphi_t^* \omega_0 = 0$  pour tout  $t$  dans  $[0, \varepsilon]$  (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par  $\omega_0$  est transverse à la fibration en cercles  $\mathbf{T}^5 \rightarrow \mathbf{T}^4$  dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs  $(\varphi_1)_* \partial/\partial\theta$ . Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur  $\mathbf{T}^5$  ne peut être  $\mathbf{T}^3$ -invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact  $\omega$  sur le tore  $\mathbf{T}^5$  ne peut être à la fois  $S^1$ -invariante (i.e. telle que  $L_{\partial/\partial\theta} \omega = 0$ ) et partout transverse au champ de vecteurs  $\partial/\partial\theta$ . Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit  $M(B, S^1, q)$  un fibré principal dont la base est fermée, de dimension  $2p$ . Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur  $M$ ,  $S^1$ -invariante et transverse aux fibres.*

*Preuve.* Soit  $Z$  le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de  $S^1$  sur  $M$ . Supposons qu'il existe une forme de contact  $\omega$  sur  $M$ , invariante par  $S^1$  et transverse aux fibres. Alors  $\alpha = \omega/\omega(Z)$  est une forme de connexion