2. Posons $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$, pour tout nombre réel t. Alors:

PROPOSITION. *Il existe un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour tout t, $|t| \leq \varepsilon$, la forme $\mathbf{T}^2$-invariante ω_t est de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. De plus, pour $1/2 < |t| \leq \varepsilon$, elle est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2\theta \cos^2\theta_1 + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta \sin^2\theta_1 + \sin^4\theta_1 \\ &\qquad + t\cos\theta_1 \sin\theta_1)\, d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t\sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6\sin^2\theta \sin^2\theta_1) \\ &\qquad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4\end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur $\mathbf{T}^5$ pour $|t| \leq 1$. La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, la forme ω_t reste de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille ω_t, avec $0 \leq t \leq \varepsilon$, est une isotopie de formes de contact $\mathbf{T}^2$-invariantes sur $\mathbf{T}^5$, qui joint ω_0 à ω_ε. Par conséquent, il existe une isotopie φ_t de difféomorphismes $\mathbf{T}^2$-équivariants du tore $\mathbf{T}^5$ telle que φ_0 est l'identité et $\omega_t \wedge \varphi_t^\star \omega_0 = 0$ pour tout t dans $[0, \varepsilon]$ (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par ω_0 est transverse à la fibration en cercles $\mathbf{T}^5 \to \mathbf{T}^4$ dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs $(\varphi_1)_\star\, \partial/\partial\theta$. Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur $\mathbf{T}^5$ ne peut être $\mathbf{T}^3$-invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact ω sur le tore $\mathbf{T}^5$ ne peut être à la fois S^1-invariante (i.e. telle que $L_{\partial/\partial\theta}\,\omega = 0$) et partout transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$. Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit $M(B, S^1, q)$ un fibré principal dont la base est fermée, de dimension $2p$. Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur M, S^1-invariante et transverse aux fibres.*

Preuve. Soit Z le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de S^1 sur M. Supposons qu'il existe une forme de contact ω sur M, invariante par S^1 et transverse aux fibres. Alors $\alpha = \omega/\omega(Z)$ est une forme de connexion