

Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **44 (1998)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

## THREE DISTANCE THEOREMS AND COMBINATORICS ON WORDS

by Pascal ALESSANDRI and Valérie BERTHÉ

ABSTRACT. The aim of this paper is to investigate the connection between some generalizations of the three distance theorem and combinatorics on words for sequences defined as codings of irrational rotations on the unit circle. We also give some new results concerning the frequencies of factors for such sequences.

### 1. INTRODUCTION

For a given  $\alpha$  in  $]0, 1[$ , let us place the points  $\{0\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}$  on the *unit circle* (we mean here the circle of *perimeter* 1), where  $\{x\}$  denotes as usual, the fractional part of  $x$  (i.e., if  $\lfloor x \rfloor$  denotes the largest integer not exceeding  $x$ ,  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ ). These points partition the unit circle into  $n + 1$  intervals having at most three lengths, one being the sum of the other two. This property is known as the *three distance theorem* and can be seen as a geometric interpretation of good approximation properties of the Farey partial convergents in the continued fraction expansion of  $\alpha$ .

The connection between this classical theorem in diophantine approximation and combinatorics on words is particularly apparent in the following result, known as the *three gap theorem*, which is equivalent to the three distance theorem and can be seen as its “dual”: assume we are given  $\alpha$  and  $\beta$  in the interval  $]0, 1[$ , the gaps between the successive  $n$  for which  $\{\alpha n\} < \beta$  take at most three values, one being the sum of the other two. It is indeed natural to introduce the binary sequence with values 0 and 1, defined as the coding of the orbit of a point of the unit circle under the rotation by angle  $\alpha$  with