Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA VERSION DE DIAMOND DE LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE DE DIRICHLET

Autor: Balazard, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64448

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 253–270

LA VERSION DE DIAMOND DE LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE DE DIRICHLET

par Michel BALAZARD

1. NOMBRES DE BEURLING

La démonstration, en 1896, du théorème des nombres premiers par Hadamard et de la Vallée Poussin, conclut un siècle de recherches, menées notamment par Gauss, Legendre, Dirichlet, Tchebycheff et Riemann. Une énigme résolue, une autre apparut : quelle était la vraie nature de ce résultat au carrefour de l'analyse et de l'arithmétique, du continu et du discret ? Ces questions presque philosophiques ont été examinées par trois des plus grands mathématiciens du vingtième siècle. En 1949, Erdős et Selberg donnèrent une démonstration élémentaire du théorème, élucidant ainsi une partie de sa nature combinatoire. En 1937, Beurling créa la théorie des nombres premiers généralisés.

Son idée fut d'envisager une étude "dynamique" du théorème des nombres premiers. Considérons une suite croissante

$$\boldsymbol{\beta} : \ 1 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$$

et formons tous les produits :

$$\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\nu}} := \beta_1^{\nu_1} \beta_2^{\nu_2} \dots$$

où $\boldsymbol{\nu} := (\nu_1, \nu_2, \dots)$ désigne une suite arbitraire de nombres entiers naturels, nuls à partir d'un certain rang. Rangeons ces produits dans l'ordre croissant :

$$1 = \alpha_1 < \alpha_2 \leq \dots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty .$$

Les β_n sont les nombres premiers généralisés et les α_n les nombres entiers généralisés de Beurling. Le problème général est d'étudier les relations existant entre les α_n et les β_n, ou plus précisément entre les fonctions de comptage:

$$P(x) := \sum_{\beta_n \leq x} 1$$

et

$$N(x) := \sum_{\alpha_n \leq x} 1 = \sum_{\beta^\nu \leq x} 1 .$$

Cette étude se divise en deux parties: le problème direct est la détermination des propriétés de $N(x)$ connaissant celles de $P(x)$, et dans l'autre direction on parle de problème inverse.

Le projet initial de Beurling est l'analyse de la stabilité du théorème des nombres premiers. Posons donc

$$P(x) = \mathrm{li}(x) + x\eta(x) ,$$
$$N(x) = Dx + x\varepsilon(x) ,$$

où li est la fonction logarithme intégral et D une constante positive[1]). On a les résultats suivants:

THÉORÈME 1 (Beurling 1937, [5]). *Si* $\gamma > 3/2$ *et* $\varepsilon(x) = O\big((\log x)^{-\gamma}\big)$, *on a* $\eta(x) = o(1/\log x)$ *(c'est-à-dire* $P(x) \sim x/\log x$*).*

Ce théorème est optimal: l'énoncé devient faux si $\gamma = \frac{3}{2}$. D'autre part, une conjecture de Bateman et Diamond (1969, cf. [4]) récemment confirmée par Kahane donne la généralisation suivante du théorème 1:

THÉORÈME 2 (Kahane 1997, [11], [12]). *Si*

$$\int_1^{+\infty} (\varepsilon(x)\log x)^2 \frac{dx}{x} < +\infty ,$$

alors $P(x) \sim x/\log x$.

Des hypothèses plus restrictives sur $\varepsilon(x)$ permettent naturellement de donner des informations plus précises sur $\eta(x)$. On dispose ainsi des résultats suivants:

---

[1]) On notera, par exemple dans le cas des nombres entiers usuels, que l'omission d'un nombre fini de nombres premiers ne modifie pas le comportement asymptotique de $P(x)$ mais change la valeur de la limite de $N(x)/x$ quand x tend vers l'infini. L'apparition d'une constante positive D dans l'expression de $N(x)$ est donc inévitable.

THÉORÈME 3 (Wegmann 1966, [17]). *Si* $a > 3$, $a > 3b$ *et* $\varepsilon(x) = O(\log^{-a} x)$, *alors* $\eta(x) = O(\log^{-b} x)$.

THÉORÈME 4 (Hall 1972, [10]). *Soient* a, c *et* b *tels que*

$$0 < a \leq 1, \quad c > 0, \quad b \leq a/7.91\,.$$

Si $\varepsilon(x) = O(\exp(-c\log^a x))$ *alors* $\eta(x) = O(\exp(-\log^b x))$.

Les théorèmes 1 à 4 concernent le problème inverse de Beurling : il s'agit d'obtenir des conclusions sur les nombres premiers à partir d'hypothèses faites sur les nombres entiers. Le problème direct est l'objet des résultats suivants [2]).

THÉORÈME 5 (Diamond 1977, [8]). *Si*

$$\int_1^{+\infty} |\eta(x)| \frac{dx}{x} < +\infty\,,$$

alors $N(x)/x$ *tend vers une limite positive quand* x *tend vers l'infini.*

THÉORÈME 6 (Diamond 1970, [7]). *Soit* $a > 1$. *Si* $\eta(x) = O(\log^{-a} x)$, *alors* $\varepsilon(x) = O(\log^{3-a} x)$.

THÉORÈME 7 (Diamond 1970, [7]). *Soit* a *tel que* $0 < a < 1$ *et* $b = \dfrac{a}{1+a}$. *Si* $\eta(x) = O(\exp(-\log^a x))$, *alors* $\varepsilon(x) = O\big(\exp(-(\log x \log\log x)^b)\big)$.

Il est intéressant de constater que les démonstrations des théorèmes 1, 2 et 4 utilisent l'analyse harmonique, alors que celles des théorèmes 3, 5, 6 et 7 sont essentiellement élémentaires. Le présent exposé a pour objet de rappeler, sans démonstrations, le cadre conceptuel proposé par Diamond pour traiter le problème direct de Beurling (paragraphe 2), d'isoler le principe technique fondamental intervenant dans les démonstrations (paragraphe 3) et enfin de présenter une application nouvelle (paragraphe 4).

---

[2]) Les travaux [18] et [1] donnent également des informations intéressantes sur ce problème.

2. L'ALGÈBRE $\mathcal{M}$

DÉFINITION

Pour tout $x \geq 1$, soit $\mathcal{B}_x$ la tribu des boréliens de $[1,x]$ et soit $\mathcal{B} = \bigcup_{x\geq 1} \mathcal{B}_x$ l'ensemble des boréliens bornés de $[1,+\infty[$. On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble des applications $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbf{C}$ dont la restriction à chaque tribu $\mathcal{B}_x$ est une mesure complexe (voir [14], chapitre 6). Dans la suite, les éléments de $\mathcal{M}$ seront appelés simplement mesures. A titre d'exemple, observons qu'on peut associer à toute fonction arithmétique $f\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ une mesure μ par la formule:

$$\mu = \sum_{n\geq 1} f(n)\,\delta_n\,,$$

où δ_a, $a \geq 1$, désigne la masse de Dirac au point a.

A chaque mesure μ est associée[3]) sa "fonction sommatoire"

$$\alpha(x) := \mu([1,x]), \quad x \geq 1\,.$$

C'est une fonction complexe continue à droite, à variation bornée dans tout intervalle $[1,M]$, $M < +\infty$. La correspondance ainsi établie entre $\mathcal{M}$ et cette classe de fonctions est bijective. On écrit: $\mu = d\alpha$.

LA CONVOLUTION DANS $\mathcal{M}$

Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, on définit leur produit de convolution $d\alpha * d\beta$ par la formule[4])

$$\int_E d\alpha * d\beta = \iint_{st\in E} d\alpha(s)d\beta(t)\,, \quad E \in \mathcal{B}\,.$$

On montre que cette définition a un sens et que $d\alpha * d\beta$ appartient à $\mathcal{M}$. Supposons, par exemple, que

$$d\alpha = \sum_{n\geq 1} f(n)\delta_n, \quad d\beta = \sum_{n\geq 1} g(n)\delta_n\,,$$

où f et g sont deux fonctions arithmétiques. Alors,

$$d\alpha * d\beta = \sum_{n\geq 1} h(n)\delta_n\,,$$

---

[3]) L'emploi de la lettre α ne doit mener à aucune confusion avec la notation des nombres entiers généralisés de Beurling α_n.

[4]) Nous présentons ici la théorie multiplicative, en vue de son application au problème de Beurling. Il y a, bien entendu, une théorie additive isomorphe.

où

$$h(n) = f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right);$$

h est le produit de convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques f et g.

La proposition suivante indique comment effectuer des calculs de convolution.

PROPOSITION 1. *Soit $d\alpha$ et $d\beta$ des mesures et f une fonction borélienne complexe sur $[1, +\infty[$ bornée et à support borné. On a:*

$$\int f(u) d\alpha * d\beta = \iint f(st) d\alpha(s) d\beta(t).$$

En particulier, pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x d\alpha * d\beta = \int_1^x \alpha\left(\frac{x}{t}\right) d\beta(t) = \int_1^x \beta\left(\frac{x}{s}\right) d\alpha(s).$$

On notera $(d\alpha)^{*n}$ la puissance n-ème de convolution d'une mesure $d\alpha$.

PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{M}$

L'addition, la convolution et la multiplication par les scalaires confèrent à $\mathcal{M}$ une structure de $\mathbf{C}$-algèbre associative, commutative et unitaire (l'élément neutre étant $\delta = \delta_1$).

Cette algèbre est intègre[5]). Ce fait, non trivial, résulte facilement d'un important théorème de Titchmarsh (cf. [16], Theorem VII).

Il est facile de voir qu'un élément de $\mathcal{M}$ est inversible si et seulement si sa masse au point 1 est non nulle. $\mathcal{M}$ possède un unique idéal maximal:

$$\mathcal{M}_0 = \{d\alpha \in \mathcal{M},\ \alpha(1) = 0\}.$$

Diamond s'est intéressé aux dérivations de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire aux applications $\mathbf{C}$-linéaires $D\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ telles que

$$D(\mu * \nu) = \mu * D(\nu) + D(\mu) * \nu$$

quelles que soient μ et ν dans $\mathcal{M}$.

---

[5]) On peut donc considérer le corps des fractions de $\mathcal{M}$. C'est le corps des «opérateurs de Mikusiński», base d'une présentation originale du calcul opératoriel. Dans [13], Mikusiński développe cette théorie, qui a des liens avec celle des distributions (cf. [15], p. 254).

THÉORÈME 8 (Diamond 1968, [6]). *Les dérivations de $\mathcal{M}$ sont les applications de la forme*

$$\mu \longmapsto \mu_0 * (\log t \,.\, \mu)\,,$$

μ_0 étant un élément fixé, arbitraire, de $\mathcal{M}$.

On notera L la dérivation fondamentale dans $\mathcal{M}$, à savoir la multiplication par la fonction $\log t$.

TRANSFORMATION DE MELLIN

Si $d\alpha$ appartient à $\mathcal{M}$, l'ensemble des nombres réels σ tels que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} d\alpha(t)$$

converge[6]), a une borne inférieure σ_c. La fonction

$$F(s) = \int_1^{+\infty} t^{-s} d\alpha(t)\,,$$

appelée transformée de Mellin de $d\alpha$, est alors définie et holomorphe dans le demi-plan $\Re(s) > \sigma_c$; elle peut éventuellement se prolonger analytiquement au-delà.

La propriété fondamentale de la transformation de Mellin est la suivante. Si

$$G(s) = \int_1^{+\infty} t^{-s} d\beta(t), \quad d\beta \in \mathcal{M}\,,$$

alors

$$H(s) := \int_1^{+\infty} t^{-s} d\alpha * d\beta(t) = F(s)G(s)$$

pour tout s tel que les trois intégrales convergent, par exemple pour tout $s = \sigma + i\tau$ tel que

$$\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} |d\alpha|(t) < +\infty \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^{-\sigma} |d\beta|(t) < +\infty\,.$$

Observons également que la transformée de Mellin de $L(d\alpha)$ est $-F'(s)$.

---

[6]) Nous entendons par là l'existence de la limite $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x t^{-\sigma} d\alpha(t)$.

TOPOLOGIE

Pour tout $x \geq 1$, la relation

$$\|d\alpha\|_x := \int_1^x |d\alpha|, \quad d\alpha \in \mathcal{M},$$

définit une semi-norme sur $\mathcal{M}$. Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, la mesure $|d\alpha| * |d\beta| - |d\alpha * d\beta|$ est positive donc on a l'inégalité :

$$\|d\alpha * d\beta\|_x \leq \|d\alpha\|_x \|d\beta\|_x$$

qui montre que la famille de semi-normes $(\| \quad \|_x)_{x \geq 1}$ munit $\mathcal{M}$ d'une structure d'algèbre topologique. Cette algèbre est complète.

CALCUL FONCTIONNEL

L'emploi dans $\mathcal{M}$ des séries entières à coefficients complexes est fondé sur la proposition suivante.

PROPOSITION 2. *Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe, de rayon de convergence $\rho > 0$. Alors*[7]*,*

(i) *$f(d\alpha) := \sum_{n \geq 0} a_n (d\alpha)^{*n}$ converge dans $\mathcal{M}$ si $|\alpha(1)| < \rho$;*

(ii) *la série $\sum_{n \geq 0} a_n (d\alpha)^{*n}$ diverge dans $\mathcal{M}$ si $|\alpha(1)| > \rho$;*

(iii) *$d\alpha \longmapsto f(d\alpha)$ est continue dans l'ouvert de $\mathcal{M}$ défini par*

$$|\alpha(1)| < \rho ;$$

(iv) *pour $d\alpha$ dans cet ouvert, on a $L(f(d\alpha)) = f'(d\alpha) * L(d\alpha)$.*

L'exponentielle

$$\exp(d\alpha) = e^{d\alpha} = \sum_{n \geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!}$$

est un exemple fondamental. Ses principales propriétés sont résumées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3. *L'exponentielle est une fonction continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0$, vérifiant :*

(i) *$e^{d\alpha + d\beta} = e^{d\alpha} * e^{d\beta}$ pour $d\alpha$ et $d\beta$ dans $\mathcal{M}$;*

(ii) *$e^{d\alpha} = d\lambda \Longleftrightarrow d\lambda * L(d\alpha) = L(d\lambda)$ et $e^{\alpha(1)} = \lambda(1)$.*

---

[7]) $(d\alpha)^0 = \delta$

PROPOSITION 4. *Avec les notations du paragraphe 1, on a:*

$$dN = e^{d\Pi},$$

où $\Pi(x) := P(x) + \frac{1}{2}P(x^{1/2}) + \frac{1}{3}P(x^{1/3}) + \dots$

Cette proposition traduit l'identité eulérienne formelle:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^s} = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-\frac{1}{\beta_n^s}} = \exp \sum_{n\geq 1,\, k\geq 1} \frac{1}{k\beta_n^{ks}}.$$

Ainsi, la théorie de Beurling ressortit à l'étude de l'exponentielle et du logarithme dans l'algèbre de mesures $\mathcal{M}$.

FORMULAIRE

Nous donnons ci-dessous une liste de propriétés d'usage constant pour le calcul dans $\mathcal{M}$.

1. La multiplication par t^r est pour tout nombre complexe r un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{M}$. En particulier, pour toute série entière $f(z)$, on a
$$t^r f(d\alpha) = f(t^r d\alpha).$$
2. $d\alpha * \frac{dt}{t} = \alpha(t)\frac{dt}{t}$.
3. $(dt)^{*n} = \dfrac{(\log t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$.
4. $(\delta + dt) * (\delta - \dfrac{dt}{t}) = \delta$.
5. $\delta + dt = e^{d\tau}$, où
$$\tau(x) := \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{\log t}.$$

3. LA MÉTHODE DE L'HYPERBOLE REVISITÉE

Si $d\alpha * d\beta = d\gamma$, on a

$$\gamma(x) = \int_{1\leq st\leq x} d\alpha(s)d\beta(t) = \int_1^x \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) = \int_1^x \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t)$$
$$= \int_1^y \beta\left(\frac{x}{s}\right)d\alpha(s) + \int_1^{x/y} \alpha\left(\frac{x}{t}\right)d\beta(t) - \alpha(y)\beta\left(\frac{x}{y}\right)$$

pour tout x et tout y tels que $1 \leq y \leq x$.

Cette façon de calculer un produit de convolution en introduisant un paramètre y, déterminé ensuite au mieux suivant la question considérée, a été imaginée par Dirichlet dans [9]. C'est la méthode de l'hyperbole. L'idée de Diamond est que l'itération de ce principe de calcul permet d'étudier des mesures définies dans $\mathcal{M}$ au moyen de séries entières comme au paragraphe précédent, par exemple des exponentielles d'autres mesures.

On a immédiatement l'estimation suivante :

LEMME 1. *Si $d\alpha$ et $d\beta$ appartiennent à $\mathcal{M}$, on a, pour $d\gamma = d\alpha * d\beta$ et $x = yz$, où $y \geq 1$, $z \geq 1$:*

$$|\gamma(x)| \leq \|d\alpha\|_y \sup_{[z,x]} |\beta| + \|d\beta\|_z \sup_{[y,x]} |\alpha| + |\alpha(y)\beta(z)| .$$

Le lemme suivant donne l'inégalité fondamentale dans la méthode de Diamond :

LEMME 2. *Soit $d\alpha$ une mesure. Posons pour tout entier $n \geq 1$,*

$$d\alpha_n := (d\alpha)^{*n} ,$$

et supposons que :

1) $\|d\alpha\|_x \leq A(x)$;

2) $|\alpha(x)| \leq B(x)C(\log x) \leq M$,

où A et B sont croissantes au sens large et C décroissante au sens large, et M est un nombre réel positif.

Alors, pour $n \geq 1$, n entier, et $x \geq 1$, x réel, on a :

$$|\alpha_n(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x)\, C\Big(\frac{\log x}{n}\Big) .$$

Démonstration. Observons pour commencer que l'hypothèse 1) entraîne :

$$\|d\alpha_n\|_z \leq A(x)^n ,$$

pour $n \geq 1$, $1 \leq z \leq x$.

On procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est contenu dans l'hypothèse 2). Le passage de n à $n+1$ se fait en appliquant le lemme 1 avec $y = x^{\frac{1}{n+1}}$, $z = x^{\frac{n}{n+1}}$, et $\beta = \alpha_n$. On a :

$$|\alpha_{n+1}(x)| \leq n(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) A(x)$$
$$+ B(x)C(\log y)A(x)^n + Mn(A(x) + M)^{n-1} B(x) C\Big(\frac{\log z}{n}\Big) .$$

Or $\log y = \dfrac{\log z}{n} = \dfrac{\log x}{n+1}$ donc

$$|\alpha_{n+1}(x)| \leq B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big)\left[nA(x)(A(x)+M)^{n-1} + A(x)^n + Mn(A(x)+M)^{n-1}\right]$$
$$\leq (n+1)(A(x)+M)^n B(x)C\Big(\frac{\log x}{n+1}\Big),$$

ce qui démontre le lemme 2. □

Ce résultat fournit une estimation générale, facile à utiliser, comme nous le verrons au paragraphe 4. Il faut cependant garder à l'esprit la possibilité d'obtenir parfois de meilleures majorations grâce à des renseignements supplémentaires, spécifiques au problème considéré.

Ainsi, nous allons conclure ce paragraphe en donnant la démonstration complète du théorème 6. Pour rédiger cette preuve, qui ne figure pas dans [7], nous avons bénéficié de fructueuses conversations avec H. G. Diamond.

On démontre en fait un résultat plus fort que le théorème 6. Soit donc $\boldsymbol{\beta}$ une suite de nombres premiers généralisés telle que (avec la notation de la proposition 4)

$$\int_1^x \frac{d\Pi(t)}{t} = \int_1^x \frac{1-t^{-1}}{t\log t}dt + \log c + O(\log^{-a} x),$$

où c et a sont des constantes positives. Alors

$$N(x) = cx + O(x\log^{2-a} x).$$

C'est l'énoncé du theorème 3.3a de [7]. Sa démonstration repose sur l'inégalité fondamentale suivante. Si

$$d\nu := t^{-1}(d\Pi - d\tau - (\log c)\delta) \quad \text{et} \quad d\nu_n := (d\nu)^{*n},$$

alors

$$|\nu_n(x)| \leq nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}\log^{-a} x$$

pour $n \geq 1, x > 1$, où A_0 et A_1 sont des constantes positives. Observons que l'application du lemme 2 donne ici un facteur supplémentaire n^a.

Pour démontrer cette inégalité, on procède bien entendu par récurrence sur n. Introduisons au préalable des constantes K_1, K_2 et K_3 telles que les inégalités suivantes soient vérifiées pour $x > 1$:

$$|\nu(x)| \leq K_1 \log^{-a} x;$$

$$|\nu(x)| \leq K_2;$$

$$\|d\nu\|_x \leq 2\log\log 3x + K_3.$$

LEMME 3. *Sous les trois hypothèses ci-dessus, on a, pour $n \geq 1$ et $x > 1$,*

$$\int_1^{\sqrt{x}} \Big[\Big(1 - \frac{\log t}{\log x}\Big)^{-a} - 1\Big] |d\nu_n|(t) \leq nK_4(2\log\log 3x + K_3)^{n-1},$$

où K_4 est une constante positive.

Démonstration. Si $0 \leq u \leq 1/2$, on a $(1-u)^{-a} - 1 \ll u$. L'inégalité à démontrer est claire si $1 \leq x < 2$, pourvu que K_4 soit assez grande. Si $x \geq 2$, l'intégrale est

$$\ll (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu_n|(t) \leq (\log x)^{-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t |d\nu|^{*n}(t).$$

Comme la multiplication par $\log t$ est une dérivation de $\mathcal{M}$, la dernière intégrale vaut

$$\begin{aligned} n\int_1^{\sqrt{x}} |d\nu|^{*(n-1)} * (\log t|d\nu|)(t) &= n\int_1^{\sqrt{x}} \Big(\int_1^{\sqrt{x}/t} |d\nu|^{*(n-1)}\Big) \log t|d\nu|(t) \\ &\leq n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log t}{t}(d\Pi + d\tau + |\log c|\delta) \\ &= n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \log t\Big(d\nu + 2\frac{d\tau}{t} + (\log c + |\log c|)\delta\Big) \\ &\ll n(2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log x, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

On peut maintenant démontrer l'inégalité fondamentale ci-dessus. Posons $A_0 = K_1$ et $A_1 = K_3 + K_4 + 2^a K_2$. L'inégalité étant alors vérifiée pour $n = 1$, supposons la vérifiée au rang n. Nous aurons, pour $x > 1$:

$$\nu_{n+1}(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \nu_n\Big(\frac{x}{t}\Big) d\nu(t) + \int_1^{\sqrt{x}} \nu\Big(\frac{x}{t}\Big) d\nu_n(t) - \nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x}).$$

La première intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} &nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1} \int_1^{\sqrt{x}} \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{-a} |d\nu|(t) \\ &\qquad \leq nA_0(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}(2\log\log 3x + K_3 + K_4)\log^{-a} x. \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est majorée par

$$\begin{aligned} &K_1 \log^{-a} x \int_1^{\sqrt{x}} \Big(1 - \frac{\log x}{\log t}\Big)^{-a} |d\nu_n|(t) \\ &\qquad \leq K_1 \log^{-a} x \left[(2\log\log 3x + K_3)^n + nK_4(2\log\log 3x + K_3)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\left|\nu_n(\sqrt{x})\nu(\sqrt{x})\right| \leq n2^a K_2 A_0 (2\log\log 3x + K_3)^{n-1} \log^{-a} x\,.$$

L'inégalité fondamentale au rang $n+1$ résulte donc de:

$$\begin{aligned} &n A_0 (L + A_1)^{n-1}(L + K_3 + K_4) + K_1 (L + K_3)^n \\ &\qquad + nK_1K_4(L + K_3)^{n-1} + 2^a K_2 A_0 n (L + K_3)^{n-1} \leq (n+1)A_0(L + A_1)^n\,, \end{aligned}$$

où $L := 2\log\log 3x$, et cela est vrai, vu les définitions de A_0 et A_1.

En conclusion,

$$d\Pi = d\tau + (\log c)\delta + t d\nu$$

donc

$$dN = e^{d\Pi} = ce^{d\tau} * (te^{d\nu}) = c(\delta + dt) * (te^{d\nu})$$

d'où

$$\begin{aligned} N(x) &= c\int_1^x \Big(\int_1^{x/u} \delta + dt\Big) u e^{d\nu} \\ &= cx\int_1^x e^{d\nu} = cx + cx\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!}\,. \end{aligned}$$

L'inégalité fondamentale permet de majorer la dernière somme:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\nu_n(x)}{n!} \leq A_0 \log^{-a} x \sum_{n\geq 1} \frac{(2\log\log 3x + A_1)^{n-1}}{(n-1)!} = A_0 e^{A_1} (\log 3x)^2 \log^{-a} x\,,$$

d'où le résultat.

4. Une application

Dans ce paragraphe, nous proposons une variation sur un thème abordé dans [2] à propos de la fonction d'Euler.

THÉORÈME 9. *Soit* $\boldsymbol{\beta}$ *une suite de nombres premiers généralisés telle que* β_n *diffère du n-ème nombre premier usuel* p_n *par une quantité* $O(n^a)$, *où* $0 \leq a < 1$. *On a alors, pour tout* c *fixé,* $c < \sqrt{2(1-a)}$,

$$\varepsilon(x) \ll \mathcal{L}(x)^{-c}\,,$$

pour $x \geq 3$, *où* $\mathcal{L}(x) := e^{\sqrt{\log x \log\log x}}$.

Observons que le résultat pour $a = 0$ découle du cas $a > 0$; nous supposons donc $a > 0$ dans la suite. Dans le cas particulier où la différence $\beta_n - p_n$ est constante, la méthode de [3] donne un meilleur résultat, comparable à l'estimation de Korobov et Vinogradov du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

La démonstration du théorème repose sur les lemmes suivants.

LEMME 4. *Sous l'hypothèse du théorème 9 et en notant* Π_1 *et* Π_2 *les fonctions associées respectivement aux suites* (p_n) *et* (β_n) *comme dans la proposition 4, nous avons :*

$$\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} = \log D + O(x^{a-1})$$

où

$$D = \prod_{n \geq 1} \frac{1 - 1/p_n}{1 - 1/\beta_n}.$$

Démonstration. Soit K un nombre entier fixé, supérieur à $1/a$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{d(\Pi_2 - \Pi_1)(t)}{t} &= \sum_{\beta_n^k \leq x} \frac{1}{k\beta_n^k} - \sum_{p_n^k \leq x} \frac{1}{kp_n^k} \\ &= \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{k} \Delta_k(x^{1/k}) + \sum_{n \geq 1,\, k \geq K} \frac{\beta_n^{-k} - p_n^{-k}}{k} \\ &\qquad + O\Big(\sum_{k \geq K,\, \beta_n^k > x} \frac{1}{k\beta_n^k}\Big) + O\Big(\sum_{k \geq K,\, p_n^k > x} \frac{1}{kp_n^k}\Big)\end{aligned}$$

où

$$\Delta_k(t) := \sum_{\beta_n \leq t} \frac{1}{\beta_n^k} - \sum_{p_n \leq t} \frac{1}{p_n^k}.$$

La majoration de Tchebycheff pour la fonction de comptage des nombres premiers nous donne :

$$\sum_{k \geq K,\, p_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll \sum_{K \leq k \leq \log x/\log 2} \frac{1}{k} \frac{x^{1/k}}{\log(x^{1/k})} \ll x^{1/K}$$

et de même,

$$\sum_{k \geq K,\, \beta_n^k \leq x} \frac{1}{k} \ll x^{1/K}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k\geq K,\beta_n^k>x}\frac{1}{k\beta_n^k}+\sum_{k\geq K,p_n^k>x}\frac{1}{kp_n^k}\ll\int_x^{+\infty}t^{\frac{1}{K}-2}dt\ll x^{\frac{1}{K}-1}\ll x^{a-1}\,.$$

Maintenant,

$$\Delta_k(t)=\sum_{p_n\leq t}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})+O(E_k(t))$$

où

$$E_k(t):=\sum_{p_n\leq t,\beta_n>t}\beta_n^{-k}+\sum_{p_n>t,\beta_n\leq t}\beta_n^{-k}\,.$$

Comme $p_n-\beta_n=O(n^a)$, et $p_n\sim n\log n$, on a, pour une constante positive convenable H et pour tout k fixé:

$$E_k(t)\ll\sum_{|p_n-t|\leq Ht^a}t^{-k}\ll\frac{t^{a-k}}{\log t}$$

d'après l'inégalité de Brun-Titchmarsh. Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}E_k(x^{1/k})\ll x^{a-1}\,.$$

Comme d'autre part,

$$\sum_{k=1}^{K-1}\frac{1}{k}\sum_{p_n\leq x^{1/k}}(\beta_n^{-k}-p_n^{-k})=\sum_{n\geq 1,1\leq k<K}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}-\sum_{1\leq k<K}\sum_{p_n^k>x}\frac{\beta_n^{-k}-p_n^{-k}}{k}\,,$$

il suffit pour conclure de vérifier que pour chaque k fixé, on a:

$$\sum_{p_n>x^{1/k}}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll x^{a-1}\,.$$

Or $\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll n^a p_n^{-k-1}$ donc

$$\sum_{p_n>t}\left|\beta_n^{-k}-p_n^{-k}\right|\ll\int_t^{+\infty}u^{a-k-1}du\ll t^{a-k}$$

d'où le résultat. $\square$

LEMME 5. *Soit $d\alpha$ une mesure et b un nombre réel positif tels que*

(i) $\|d\alpha\|_x \ll \log\log 3x, \quad x \geq 1$;

(ii) $\alpha(x) \ll x^{-b}, \quad x \geq 1$.

Soit $d\beta = e^{d\alpha}$, $d\gamma(t) = td\beta(t)$ et $d\mu = dN_1 * d\gamma$, où $N_1(t) = \lfloor t \rfloor$. Alors, pour toute constante $c < \sqrt{2b}$, on a :

(iii) $\beta(x) = 1 + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$;

(iv) $\gamma(x) \ll x\mathcal{L}(x)^{-c}, \quad x \geq 3$;

(v) $\mu(x) = x + O(\mathcal{L}(x)^{-c}), \quad x \geq 3$.

Démonstration. Le lemme 2 s'applique avec :

$$A(x) = M_1 \log\log 3x\,, \qquad B(x) = M_2\,, \qquad C(u) = e^{-bu}\,,$$

où M_1 et M_2 sont des constantes positives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\beta(x) &= \int_1^x \sum_{n\geq 0} \frac{(d\alpha)^{*n}}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n\leq K} + \sum_{n>K},\end{aligned}$$

où K est un paramètre, choisi ultérieurement.

Nous avons pour $n \geq 1$,

$$\frac{|\alpha_n(x)|}{n!} \ll \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b\frac{\log x}{n}}\,.$$

La formule de Stirling et un calcul facile montrent que cette dernière quantité est maximale pour

$$n = \sqrt{(2b + o(1))\frac{\log x}{\log\log x}}$$

et est donc, pour tout $n \geq 1$:

$$\ll \mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\,.$$

Si nous choisissons $K = \log x$, par exemple, cette dernière estimation se transmet à $\sum_{n\leq K}$. Quant au reste, il est

$$\ll \sum_{n>\log x} \frac{(M_1 \log\log 3x + O(1))^{n-1}}{(n-1)!} \ll \exp\left(-(1+o(1))\log x \log\log x\right)$$

donc négligeable : l'assertion (iii) est démontrée.

L'assertion (iv) résulte d'une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x t d\beta(t) &= x\beta(x) - \int_1^x \beta(t)dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} + \int_1^x \mathcal{L}(t)^{-\sqrt{2b}+o(1)}dt \\ &\ll x\mathcal{L}(x)^{-\sqrt{2b}+o(1)} .\end{aligned}$$

Pour démontrer l'assertion (v) nous employons de nouveau la méthode de l'hyperbole :

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \int_1^y \gamma\left(\frac{x}{t}\right)dN_1(t) + \int_1^{x/y} N_1\left(\frac{x}{t}\right)d\gamma(t) - N_1(y)\gamma\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \sum_{n\le y}\gamma\left(\frac{x}{n}\right) + x\beta\left(\frac{x}{y}\right) + O(\|d\gamma\|_{x/y}) + O\left(x\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}\right)\end{aligned}$$

d'après (iv) et l'égalité

$$N_1\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} + O(1) .$$

Or

$$\|d\gamma\|_z = \int_1^z |t d\beta(t)| = \int_1^z t|d\beta|(t) \le z\|d\beta\|_z \le ze^{\|d\alpha\|_z} \le z(\log 3z)^{M_1} ,$$

pour $z \ge 1$. Par suite, en utilisant (iii) et (iv),

$$\mu(x) = x + O(x(\log y)\mathcal{L}(x/y)^{-\sqrt{2b}+o(1)}) + O(x(\log 3x)^{M_1}/y) .$$

En choisissant $y = x^\varepsilon$ avec ε positif assez petit, on obtient l'assertion (v). □

Nous pouvons maintenant achever de démontrer le théorème 9. Soit N_2 la fonction de comptage des nombres entiers généralisés engendrés par la suite $\boldsymbol{\beta}$. En utilisant les notations des lemmes 4 et 5, posons :

$$\begin{aligned}d(\Pi_2 - \Pi_1) &= (\log D)\delta + d\lambda , \\ d\alpha(t) &= \frac{d\lambda(t)}{t} ,\end{aligned}$$

de sorte que, d'une part,

$$\begin{aligned}\|d\alpha\|_x &\le \int_1^x \frac{1}{t}(|\log D|\delta + d\Pi_2 + d\Pi_1)(t) \\ &\le 2\log\log(3x) + O(1) ,\end{aligned}$$

et d'autre part (lemme 4),

$$\alpha(x) \ll x^{a-1}.$$

Or,

$$dN_2 = e^{d\Pi_2} = e^{d\Pi_1} * e^{d\Pi_2 - d\Pi_1} = dN_1 * e^{(\log D)\delta + d\lambda} = DdN_1 * d\gamma$$

où $d\gamma(t) = te^{d\alpha}(t)$. Le théorème résulte donc de l'assertion (v) du lemme 5.

REMERCIEMENTS

Je remercie: Gautami Bhowmik et Olivier Ramaré pour avoir suscité l'écriture de ce texte en m'invitant à participer au colloque de décembre 1997 à Lille, "Fonctions zêta et énumération"; Harold Diamond pour d'intéressantes suggestions et indications, notamment concernant le théorème 6; et Éric Saias pour d'utiles remarques.

RÉFÉRENCES

[1] BALANZARIO, E. P. On Beurling's theory of generalized primes. Ph. D. thesis, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.

[2] BALAZARD, M. Une remarque sur la fonction d'Euler. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 47* (1998), 325–330.

[3] BALAZARD, M. et G. TENENBAUM. Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler. *Compositio Math. 110* (1998), 239–250.

[4] BATEMAN, P. T. et H. G. DIAMOND. Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers. In: *Studies in Number Theory* (W. J. LeVeque, editor), *MAA Studies in Mathematics 6* (1969), 152–210.

[5] BEURLING, A. Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés, I. *Acta Math. 68* (1937), 255–291.

[6] DIAMOND, H. G. Characterization of derivations on an algebra of measures, II. *Math. Z. 105* (1968), 301–306.

[7] —— Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers. *Illinois J. Math. 14* (1970), 12–28.

[8] —— When do Beurling generalized integers have a density? *J. reine angew. Math. 295* (1977), 22–39.

[9] LEJEUNE DIRICHLET, G. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. In: *Mathematische Werke, vol. 2*, 49–66. Berlin, 1897. (Reprinted by Chelsea Publ. Co.)

[10] HALL, R. S. The prime number theorem for generalized primes. *J. Number Theory 4* (1972), 313–320.

[11] KAHANE, J.-P. Sur les nombres premiers généralisés de Beurling. Preuve d'une conjecture de Bateman et Diamond. *J. Théor. Nombres Bordeaux 9* (1997), 251–266.

[12] —— Le rôle des algèbres A de Wiener, A^∞ de Beurling et H^1 de Sobolev dans la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling. *Ann. Inst. Fourier 48* (1998), 611–648.

[13] MIKUSIŃSKI, J. *Operational Calculus, Vol. 1.* Pergamon Press, 1983.

[14] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis, 2nd edition.* Tata McGraw-Hill, 1974.

[15] SCHWARTZ, L. *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Odile Jacob (Paris), 1997.

[16] TITCHMARSH, E. C. The zeros of certain integral functions. *Proc. London Math. Soc. (2) 25* (1926), 283–302.

[17] WEGMANN, H. Beiträge zur Zahlentheorie auf freien Halbgruppen, II. *J. reine angew. Math. 221* (1966), 150–159.

[18] ZHANG, W.-B. Density and O-density of Beurling generalized integers. *J. Number Theory 30* (1988), 120–139.

(Reçu le 3 décembre 1998)

Michel Balazard

C.N.R.S.
Laboratoire d'algorithmique arithmétique
Mathématiques, Université de Bordeaux I
351, Cours de la Libération
F-33405 Talence
France
e-mail: balazard@math.u-bordeaux.fr