

## 2.2 A FUBINI COUNTEREXAMPLE

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2.2 A FUBINI COUNTEREXAMPLE

In this section, we give an example of (2). Let  $\mathcal{A}$  be as in (5) and define  $\mu|_{\mathcal{A}}$  by

$$(11) \quad \mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{if } A \text{ is meager,} \\ 1 & \text{if } A \text{ is comeager.} \end{cases}$$

This is possible, since no set  $A \subset \mathbf{R}$  is simultaneously meager and comeager, for otherwise  $\emptyset = A \cap A^c$  would be comeager, in contradiction to Baire's theorem. It is easy to check that  $\mu$  is a probability measure on  $(\mathbf{R}, \mathcal{A})$ . Let again  $\nu := \lambda :=$  Lebesgue measure on  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbf{R})$ , and choose  $A \in \mathcal{A}$  meager with  $\lambda(A^c) = 0$ . Then  $1_A(\cdot + y)$  is  $\mathcal{A}$ -measurable with

$$\int_{\mathbf{R}} 1_A(x + y) d\mu(x) = \mu(A - y) = 0 \quad (y \in \mathbf{R}).$$

On the other hand, we have

$$\int_{\mathbf{R}} 1_A(x + y) d\nu(y) = \lambda(A - x) = \infty \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Hence (2) is obviously true in this case.

## 3. MEASURABILITY

Here is a positive result, having a certain measurability property of  $F$  from (1) among its conclusions. An application of this occurs in Mattner (1999).

3.1. THEOREM. *Let  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  and  $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$  be  $\sigma$ -finite measure spaces, let  $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$  be a function measurable with respect to the product  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , and put*

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\{f(\cdot, y) : y \in \mathcal{Y}\}),$$

$$\mathcal{B}_0 := \sigma(\{f(x, \cdot) : x \in \mathcal{X}\}),$$

$$\overline{\mathcal{A}}_0 := \{A \in \mathcal{A} : \exists A_0 \in \mathcal{A}_0 \text{ with } A = A_0 \quad [\mu]\},$$

$$\overline{\mathcal{B}}_0 := \{B \in \mathcal{B} : \exists B_0 \in \mathcal{B}_0 \text{ with } B = B_0 \quad [\nu]\},$$

$$\overline{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0} := \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \exists C_0 \in \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0 \text{ with } C = C_0 \quad [\mu \otimes \nu]\}.$$

Then  $f$  is  $\overline{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_0}$ -measurable,  $\int_{\mathcal{Y}} f(\cdot, y) d\nu(y)$  is  $\overline{\mathcal{A}}_0$ -measurable, and  $\int_{\mathcal{X}} f(x, \cdot) d\mu(x)$  is  $\overline{\mathcal{B}}_0$ -measurable.