

1. Introduction and summary

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CLASS NUMBER FORMULAE FOR IMAGINARY QUADRATIC
NUMBER FIELDS $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ WITH n SQUAREFREE AND
 $n \equiv 1 \pmod{4}$ OR $n \equiv 2 \pmod{4}$

by Richard H. HUDSON, Charles J. JUDGE and Turker TEKER

1. INTRODUCTION AND SUMMARY

Let $\mathbf{Q}(\sqrt{-n})$ denote an imaginary quadratic number field where throughout n will always be a positive, squarefree integer and let $h(-n)$ denote its class number. Berndt and Chowla [2] showed that if $p \equiv 3 \pmod{4}$, then the Legendre symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ summed over certain subintervals of $(0, p)$ is equal to zero. The result leads immediately to interesting class number formulae in terms of the remaining subintervals of $(0, p)$ using Dirichlet's classical results ([3], [4]), and the results are easily generalized to composite moduli $n \equiv 3 \pmod{4}$. Berndt and Chowla remark that it would be interesting to obtain similar results for $p \equiv 1 \pmod{4}$. In this paper we show that a simple and elementary modification of Berndt and Chowla's method, when used in conjunction with the Jacobi symbol $\left(\frac{-4n}{a}\right)$ in subintervals of $(0, 2n)$, as suggested by Dirichlet [3], [4], leads to class number formulae relating values of $\left(\frac{-4n}{a}\right)$ in subintervals of $(0, 2n)$ to $h(-n)$ for either $n \equiv 1 \pmod{4}$ or $n \equiv 2 \pmod{4}$. In particular, in section two we prove the following theorem (throughout $[x]$ denotes the greatest integer $\leq x$).

THEOREM. *Let n be a positive, squarefree integer with either $n \equiv 1 \pmod{4}$ or $n \equiv 2 \pmod{4}$ and with $(a, 2n) = 1$, and let j be a positive integer with $(j, 2n) = 1$ and $1 \leq j \leq n$. Then if $\left(\frac{-4n}{j}\right) = +1$, we have*

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\left[\frac{4in}{j}\right]+1}^{\left[\frac{(4i+2)n}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right),$$

and if $\left(\frac{-4n}{j}\right) = -1$, then we have

$$h(-n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{j-1}{2}} \sum_{a=\left[\frac{(4i-2)n}{j}\right]+1}^{\left[\frac{4in}{j}\right]} \left(\frac{-4n}{a}\right).$$

If $j = 1$, the result is due to Dirichlet [3], [4]. We illustrate the theorem when $n = 13$ and $j = 3$. Then $\left(\frac{-52}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$. Thus

$$h(-13) = \frac{1}{2} \sum_{a=9}^{17} \left(\frac{-52}{a}\right).$$

Now $\left(\frac{-52}{9}\right) = \left(\frac{-52}{11}\right) = \left(\frac{-52}{15}\right) = \left(\frac{-52}{17}\right) = +1$, and so $h(-13) = \frac{1}{2}(4) = 2$. The study of class numbers relating values of the Jacobi symbol $\left(\frac{a}{n}\right)$ to $h(-n)$ when $n \equiv 3 \pmod{4}$ in subintervals other than $(0, \frac{n}{2})$ has been given by numerous authors. These include among others, Berndt [1], Berndt and Chowla [2], Dirichlet [3]–[4], Holden [5]–[11], Hudson and Williams [12], Johnson and Mitchell [13], Karpinski [14], and Lerch [15]–[16]. A partial summary of these results appears in [12].

2. PROOF OF THE THEOREM

We first note that j is an odd, positive integer with $(j, n) = 1$. We write

$$\sum_{\substack{a=1 \\ (a, 2n)=1}}^{2n-1} \left(\frac{-4n}{a}\right) = \sum_{r=0}^{j-1} S_r$$

where