

# 7.1 COMPLETE GRAPHS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 7. EXAMPLES

We give here examples of regular graphs and when possible compute independently the series  $F$  and  $G$ . In some cases it will be easier to compute  $F$ , while in others it will be simpler to compute  $G$  first. In all cases, once one of  $F$  and  $G$  has been computed, the other one can be obtained using Corollary 2.6.

In all the examples the graphs are vertex transitive, so the choice of  $\star$  is unimportant. To simplify the computations we choose  $\dagger = \star$  and the length labelling.

## 7.1 COMPLETE GRAPHS

Let  $\mathcal{X} = K_v$ , the complete graph on  $v \geq 3$  vertices. Its degree is  $d = v - 1$ . To compute  $F$  and  $G$ , choose three distinct vertices  $\star, \$, \#$  (the choice is unimportant as  $K_v$  is three-transitive). Define growth series

$F(u, t)$  the growth series of circuits based at  $\star$ ;

$F'(u, t)$  the growth series of paths  $\pi$  from  $\$$  to  $\star$  with  $\pi_1^\omega = \#$ ;

$F''(u, t)$  the growth series of paths  $\pi$  from  $\$$  to  $\star$  with  $\pi_1^\omega = \star$ .

Then

$$\begin{aligned} F &= 1 + (v - 1)t \left[ (v - 2)F' + uF'' \right], \\ F' &= t \left[ F'' + (v - 3 + u)F' \right], \\ F'' &= t \left[ 1 + (F - 1) \frac{v - 2 + u}{v - 1} \right]. \end{aligned}$$

Indeed the first line states that a circuit at  $\star$  is either the trivial circuit at  $\star$ , or a choice of one of  $v - 1$  edges to another point (call it  $\$$ ), followed by a path from  $\$$  to  $\star$ ; this path can first go to any vertex of the  $v - 2$  vertices (say  $\#$ ) different from  $\star$  and  $\$$ , and thus contribute  $F'$ , or go back to  $\star$  and contribute  $F''$  and a bump.

The second equation says that a path from  $\$$  to  $\star$  starting by going to  $\#$  can either continue to  $\star$ , contributing  $F'$ , go to any of the  $v - 3$  other vertices contributing  $F'$ , or come back to  $\$$ , contributing  $F''$  and a bump.

The third line says that a path from  $\$$  to  $\star$  starting by going to  $\star$  continues as a circuit at  $\star$ ; but if the circuit is non-trivial, then one out of  $v - 1$  times a bump will be contributed.

Solving the system, we obtain

$$F(u, t) = \frac{1 + (1 - u)t}{1 - (v - 2 + u)t} \cdot \frac{1 - (v - 2)t + (1 - u)(v - 2 + u)t^2}{1 + t + (1 - u)(v - 2 + u)t^2}.$$

We then compute

$$G(t) = F(1, t) = \frac{1 - (v - 2)t}{(1 + t)(1 - (v - 1)t)},$$

$$F(0, t) = \frac{(1 + t)(1 - (v - 2)t + (v - 2)t^2)}{(1 - (v - 2)t)(1 + t + (v - 2)t^2)}.$$

## 7.2 CYCLES

Let  $\mathcal{X} = C_k$ , the cycle on  $k$  vertices. Here, as there are 2 proper circuits of length  $n$  for all  $n$  multiple of  $k$  (except 0), we have

$$F(0, t) = \frac{1 + t^k}{1 - t^k}.$$

Obtaining a closed form for  $G$  is much harder. The number of circuits of length  $n$  is

$$g_n = \sum_{i \in \mathbf{Z} : i \equiv 0 [k], i \equiv n [2]} \binom{n}{\frac{n+i}{2}},$$

from which, by [Gou72, 1.54], it follows that

$$G(t) = \frac{1}{k} \sum_{\zeta^k=1} \frac{1}{1 - (\zeta + \zeta^{-1})t} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right)t}.$$

It is not at all obvious how to simplify the above expression. A closed-form answer can be obtained from (2.3), namely

$$G(t) = \frac{(2t)^2 + (1 - \sqrt{1 - 4t^2})^2}{(2t)^2 - (1 - \sqrt{1 - 4t^2})^2} \cdot \frac{(2t)^k + (1 - \sqrt{1 - 4t^2})^k}{(2t)^k - (1 - \sqrt{1 - 4t^2})^k},$$

or, expanding,

$$G(t) = \frac{(2t)^k + \sum_{m=0}^{k/2} (1 - 4t^2)^m \binom{k}{2m}}{\sum_{m=1}^{(k+1)/2} (1 - 4t^2)^m \binom{k}{2m-1}}.$$

However in general this fraction is not reduced. To obtain reduced fractions for  $F(u, t)$  (and thus for  $G(t)$ ), we have to consider separately the cases where  $k$  is odd or even.