**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 45 (1999)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PUZZLES DE YOCCOZ POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE

**Kapitel:** 1.2 Graphes et puzzles

**Autor:** ROESCH, Pascale

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-64443

## 1.2 Graphes et puzzles

Définition 1.6. Soit $f\colon X' \to X$ une application à allure rationnelle simple. On dit qu'un graphe $\Gamma$ (formé d'arêtes – arcs de $\widehat{\mathbf{C}}$ – et de sommets – points de $\widehat{\mathbf{C}}$) est *admissible* s'il vérifie les conditions suivantes :

- $\Gamma$ est un graphe connexe fini inclus dans $\overline{X}$ et contenant $\partial X$ ;
- $\Gamma$ est *stable* au sens où $f^{-1}(\Gamma)$ contient $\Gamma \cap X'$ ;
- l'orbite positive du point critique ne rencontre pas $\Gamma$.

Des exemples de tels graphes seront construits par la suite.

Étant donné un graphe admissible $\Gamma$ pour $f\colon X' \to X$, on appelle *pièce de profondeur n,* $n \geq 0$, toute composante connexe de l'ouvert $f^{-n}(X \setminus \Gamma) = f^{-n}(X) \setminus f^{-n}(\Gamma)$. Le *puzzle* associé à $(X', X, f, \Gamma)$ est la collection de toutes ces pièces.

Les pièces de profondeur $n$ donnée sont ainsi des ouverts disjoints et tout point $x$ de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$ se trouve dans une unique pièce de profondeur $n$ que l'on note $P_n(x)$.

Le bord des pièces de profondeur 0 est contenu dans $\Gamma$. Pour $n \geq 1$, le bord des pièces de profondeur $n$ est contenu dans le graphe $\Gamma_n$ où la suite $\Gamma_n$, $n \geq 0$, est définie comme suit :

$$\Gamma_0 = \Gamma\,, \quad \Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma \cap X) \cup \partial X'\,, \;\ldots\;, \quad \Gamma_{n+1} = f^{-n}(\Gamma_1)\,, \quad n \geq 1\,.$$

Une pièce de profondeur $n$ est donc aussi une composante connexe de $f^{-n}(X) \setminus \Gamma_n$.

Lemme 1.8. *Soit $\Gamma$ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle $f$ de $X'$ dans $X$.*

a) *Toute pièce de profondeur $n+1$ du puzzle associé à $\Gamma$ est incluse dans une unique pièce de profondeur $n$.*

b) *Pour tout point $x$ de $f^{-(n+1)}(X \setminus \Gamma)$, $f$ induit une application de $P_{n+1}(x)$ sur $P_n\big(f(x)\big)$ qui, selon que $P_{n+1}(x)$ contient ou non l'éventuel point critique de $f$, est soit un revêtement double ramifié, soit un homéomorphisme.*

c) *Toutes les pièces du puzzle sont simplement connexes.*

*Preuve.* a) Cela provient de l'inclusion $X' \subset X$ et de la stabilité de $\Gamma$.

b) Comme les pièces de profondeur $n$ sont les composantes connexes de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$, chaque image $f\big(P_{n+1}(x)\big)$ est contenue dans $P_n\big(f(x)\big)$. De plus, comme $f$ est ouverte, le bord de $f\big(P_{n+1}(x)\big)$ est inclus dans $f\big(\partial P_{n+1}(x)\big)$, donc dans $f(\Gamma_{n+1}) = \Gamma_n$. Ceci montre que l'application de $P_{n+1}(x)$ dans $P_n\big(f(x)\big)$ induite par $f$ est propre et est donc un revêtement ramifié. Si $P_{n+1}(x)$ ne contient pas le point critique, cette application est un homéomorphisme; sinon, c'est un revêtement double ramifié car le point critique est simple.

c) Comme le graphe $\Gamma$ est connexe, les pièces de profondeur $0$ sont simplement connexes. On procède ensuite par récurrence. Si $P$ est une pièce de profondeur $n+1$, son image $f(P)$ est une pièce de profondeur $n$ et est donc simplement connexe. Comme $f$ induit un revêtement ramifié de $P$ sur $f(P)$, la formule de Riemann-Hurwitz montre que $P$ est simplement connexe. □

DÉFINITION 1.7. Si $x \in K(f)$ est un point dont l'orbite positive ne rencontre pas $\Gamma$, il est contenu dans une suite infinie et décroissante de pièces. On appelle *bout* de $x$ cette suite

$$\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots \supset P_n(x) \supset \cdots\big).$$

et *impression* de $x$ l'intersection de ces pièces

$$\operatorname{Imp}(x) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(x).$$

Le lemme 1.8 montre que l'application $f$ envoie naturellement le bout de $x$ sur celui de $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f\big(\big(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots\big)\big) &= \big(f(P_1(x)) \supset f(P_2(x)) \supset \cdots\big) \\ &= \big(P_0(f(x)) \supset P_1(f(x)) \supset \cdots\big). \end{aligned}$$

En particulier, on dit qu'un bout est *périodique* par $f$ s'il est égal à son image par $f^k$ pour un $k > 0$.

### 1.3 LE THÉORÈME DE YOCCOZ

DÉFINITION 1.9. Étant donné un graphe admissible $\Gamma$ pour une application à allure rationnelle simple $f$, on dit qu'un point $x$ de $K(f)$ est *bagué* — à la profondeur $n$ — si la condition suivante est satisfaite :

$$\overline{P}_{n+1}(x) \subset P_n(x).$$

On dit que $x$ est *infiniment bagué* par $\Gamma$ s'il est bagué à une infinité de profondeurs différentes.

Le théorème ci-dessous, dû à J.-C. Yoccoz, est un outil essentiel pour étudier la connexité locale des ensembles de Julia (voir [H, M2]). Il fait