**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 45 (1999)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PUZZLES DE YOCCOZ POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE

**Kapitel:** 2.1 Un théorème de connexité locale

**Autor:** ROESCH, Pascale

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-64443

dans $\mathrm{Imp}(x_0)$, les pièces critiques situées sur les colonnes $0, \ldots, n-1$ de $T(x)$ ont une profondeur bornée par un entier $l$. Par suite, pour tout $i \geq l$, l'application $f^n$ induit un homéomorphisme conforme de $P_{i+n}(x)$ sur $P_i(x_0)$, donc un homéomorphisme de $\mathrm{Imp}(x)$ sur $\mathrm{Imp}(x_0)$.

On suppose à présent que l'orbite de $x$ évite $\mathrm{Imp}(x_0)$, c'est-à-dire qu'aucune colonne de $T(x)$ n'est entièrement critique. On va montrer que, si $T(x)$ est récurrent, il est non persistant. Il suffit pour cela de construire une suite $n_i$ sur laquelle $\tau$ est bornée.

Dans le tableau $T(x_0)$, entre les colonnes 0 et $k$, les positions critiques ont une profondeur majorée par $l$. Dans $T(x)$, on regarde la colonne de plus petit indice $j$ où l'on trouve des positions critiques à une profondeur strictement supérieure à $l$ et on note $p$ la profondeur de la dernière position critique sur cette colonne. L'anneau $A_p\big(f^j(x)\big)$ est donc semi-critique. La propriété T3) assure alors que la diagonale issue de la position $(p+j+1, 0)$ dans $T(x)$ ne contient aucune pièce critique à une profondeur strictement supérieure à $l+1$. Ainsi, $\tau(p+j+1) \leq l+1$ et on pose $n_1 = p+j+1$. On continue en considérant la colonne de plus petit indice qui contient des positions critiques de profondeur strictement supérieure à $p$. On construit ainsi une suite $n_i$ sur laquelle $\tau$ reste bornée par $l+1$. □

## §2 La pratique

### 2.1 Un théorème de connexité locale

On s'intéresse dans la suite aux polynômes de degré $d+1$, $d \geq 2$, dont l'un des points fixes dans $\mathbf{C}$ est un point critique de multiplicité $d-1$. Un tel polynôme est conjugué, par une transformation affine de $\mathbf{C}$, à un polynôme de la forme

$$(*) \qquad f(x) = a + \left(x + \frac{d+2}{d}a\right)(x-a)^d, \qquad x \in \mathbf{C},$$

où $a$ désigne le point fixe critique de multiplicité $d-1$. Le point $-a$ est alors l'unique autre point critique et sera appelé (par contraste) *point critique libre*.

Le point $a$ est un point fixe super-attractif. Son *bassin d'attraction* est l'ouvert

$$\widetilde{B}(a) = \left\{x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} a\right\}$$

et son *bassin immédiat*, noté $B(a)$, est la composante connexe de $\widetilde{B}(a)$ qui contient $a$. Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. *Le bord du bassin immédiat $B(a)$ est localement connexe. En fait, c'est une courbe de Jordan.*

REMARQUE 2.2. Le cas où $d = 2$ a été considéré par D. Faught dans sa thèse [Fa].

La démonstration du théorème, qu'on expose dans la suite, distingue deux cas.

Si le point critique libre $-a$ est dans $B(a)$ ou dans le bassin de l'infini

$$B(\infty) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \right\},$$

le polynôme $f$ est hyperbolique. La preuve s'appuie alors sur des arguments très classiques qu'on explique brièvement dans la partie 2.3.

Dans la suite, on considère donc un polynôme $f$ de la forme $(*)$ pour lequel $-a$ n'est ni dans $B(a)$, ni dans $B(\infty)$. La démonstration se déroule en trois étapes. On donne d'abord une première description de la dynamique du polynôme $f$ fondée sur des résultats classiques [M1]. On exploite ensuite cette description pour trouver un graphe admissible auquel on puisse appliquer le théorème 1.10. Si le bout critique n'est pas périodique, chaque impression est réduite à un point et il suffit alors de voir que l'adhérence de toute pièce a une intersection connexe avec le bord de $B(a)$ pour établir la connexité locale. Sinon, il reste une étape pour montrer que l'impression du point critique libre rencontre $\partial B(a)$ en un seul point.

## 2.2 ÉTUDE RAPIDE DE LA DYNAMIQUE

On observe tout d'abord que, comme $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, le bassin d'attraction $B(\infty)$ est connexe. Ensuite, le théorème de Böttcher [B] donne le résultat suivant (voir [M1, 17.3]):

PROPOSITION 2.3. *Si $-a$ est en dehors de $B(a)$ (resp. de $B(\infty)$), il existe une représentation conforme $\phi_a \colon \mathbf{D} \to B(a)$ (resp. $\phi \colon \mathbf{D} \to B(\infty)$) qui conjugue $f$ à $z \mapsto z^d$ (resp. à $z \mapsto z^{d+1}$) et est unique à composition près dans $\mathbf{D}$ avec une rotation d'angle $2k\pi/(d-1)$ (resp. $2k\pi/d$).*