

## 4. Feuilletages sur le plan projectif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **45 (1999)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Remarquons que dans cette preuve on a utilisé seulement le fait que  $\Phi$  est un courant positif fermé  $\mathcal{F}$ -invariant et numériquement effectif; sa provenance d'une courbe entière est inessentielle. Remarquons aussi (voir [De2]) que l'effectivité numérique est automatique si  $\Phi_{alg} = 0$ .

Les théorèmes 1 et 2 et la relation  $K_X = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$ , où  $K_X$  est le fibré canonique de  $X$ , impliquent:

COROLLAIRE 1.  $c_1(X) \cdot [\Phi] \geq 0$ .  $\square$

Si  $\Phi$  était une courbe algébrique lisse  $D$  on aurait la formule d'adjonction  $c_1(X) \cdot [D] = [D]^2 + \chi(D)$  et le corollaire serait conséquence de  $[D]^2 \geq 0$  (effectivité numérique) et  $\chi(D) \geq 0$  (inégalité tautologique). Naïvement, dans tout ce qui précède on a donc remplacé la formule d'adjonction par sa version feuilletée  $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})$ ,  $[D]^2$  par  $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ , et  $\chi(D)$  par  $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$ .

COROLLAIRE 2.  $X$  n'est pas de type général.  $\square$

En effet, le fibré canonique d'une surface de type général est presque ample (i.e., ample hors d'une collection finie de courbes rationnelles d'auto-intersection négative, qui sont négligeables car contractibles), et donc ([Mc]) on aurait  $c_1(X) \cdot [\Phi] < 0$ .

Ceci permet d'éviter, dans la preuve de McQuillan de la conjecture de Green-Griffiths, le recours au théorème de semi-positivité générique de Miyaoka [Mi]. Pour prouver cette conjecture McQuillan considère une courbe entière  $f_0: \mathbf{C} \rightarrow X_0$  à valeurs dans une surface de type général. Si  $c_1^2(X_0) > c_2(X_0)$ , il construit un revêtement ramifié  $X \rightarrow X_0$  sur lequel le relevé  $f: \mathbf{C} \rightarrow X$  est tangente à un feuilletage à singularités réduites. Puisque  $X$  est encore de type général, le corollaire 2 implique que  $f$ , et donc  $f_0$ , est dégénérée.

#### 4. FEUILLETAGES SUR LE PLAN PROJECTIF

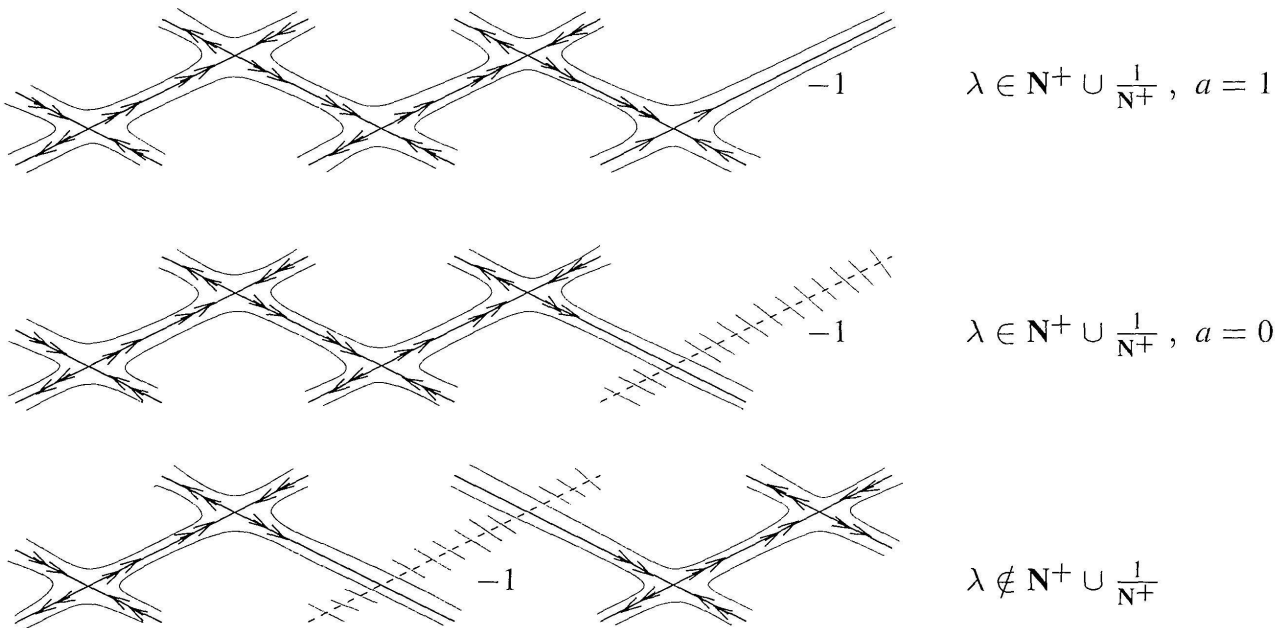
Dans cette dernière section nous allons démontrer le théorème énoncé dans l'introduction. Soit donc  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe de  $\mathbf{CP}^2$  dont toutes les singularités sont non nilpotentes. On a  $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1-d)$  et  $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(2+d)$ , où (par définition)  $d$  est le degré de  $\mathcal{F}$ .

Certaines singularités peuvent ne pas être réduites, notamment celles engendrées par un champ de vecteurs dont la partie linéaire admet les valeurs propres 1 et  $\lambda \in \mathbf{Q}^+$ . Si  $\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$  la singularité est linéarisable, si au contraire  $\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$  sa forme normale (Poincaré-Dulac, voir [CS]) est

$$(nz + aw^n)dw - wdz = 0$$

où  $a \in \{0, 1\}$  et  $n \in \{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \cap \mathbf{N}^+$ .

Soit donc  $X \xrightarrow{\pi} \mathbf{CP}^2$  la résolution (minimale) de ces singularités. Un calcul simple et explicite montre que chaque composante connexe du diviseur exceptionnel de  $\pi$  est une chaîne de courbes rationnelles qui contient une  $(-1)$ -courbe qui est soit invariante par le feuilletage relevé  $\mathcal{G}$  (cas non linéarisable) soit transverse à ce même feuilletage (cas linéarisable). Les autres courbes de la chaîne sont  $\mathcal{G}$ -invariantes.



Décomposons le diviseur exceptionnel de  $\pi$  comme  $F \cup D$ , où  $F = \bigcup_{j=1}^l F_j$  est l'union des  $(-1)$ -courbes qui ne sont pas  $\mathcal{G}$ -invariantes. On a alors [Br]

$$T_{\mathcal{G}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(F)$$

$$N_{\mathcal{G}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-2F - D).$$

Soit  $\Psi \in A^{1,1}(X)'$  le courant positif fermé engendré par le relevé de  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{CP}^2$  sur  $X$ . On suppose que  $f$  n'est pas dégénérée, et on normalise  $\Psi$  de manière telle que  $c_1(\pi^*(\mathcal{O}(1))) \cdot [\Psi] = 1$ . On obtient alors

$$c_1(T_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] = 1 - d + \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi]$$

$$c_1(N_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] \leq 2 + d - 2 \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi]$$

(car  $[\Psi] \cdot [D] \geq 0$ ), et les théorèmes 1 et 2 impliquent

$$\sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi] \geq d - 1$$

$$2 \sum_{j=1}^l [F_j] \cdot [\Psi] \leq d + 2$$

et enfin

$$d \leq 4.$$

Ce qui prouve le théorème.

REMARQUE. Sans hypothèse sur les singularités de  $\mathcal{F}$  le théorème devient évidemment faux, on peut par contre espérer affaiblir l'hypothèse  $d \geq 5$  (par  $d \geq 2$  ?).

## RÉFÉRENCES

- [Br] BRUNELLA, M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 30 (1997), 569–594.
- [CS] CAMACHO, C. et P. SAD. Pontos singulares de equações diferenciais analíticas. In: *16º Coloquio Brasileiro de Matemática*. IMPA, 1987.
- [De1] DEMAILLY, J.-P. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math.* 73 (1997), 3–23.
- [De2] — Courants positifs fermés et théorie de l'intersection. *Gaz. Math.* 53 (1992), 131–159.
- [GG] GREEN, M. and P. GRIFFITHS. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: *The Chern Symposium 1979*. Springer (1980), 41–74.
- [Jo] JOUANOLOU, J.-P. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. *Math. Ann.* 232 (1978), 239–245.
- [LN] LINS NETO, A. Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 25 (1994), 181–206.
- [MR] MARTINET, J. et J.-P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre. *Publ. IHES* 55 (1982), 63–164.