Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 45 (1999)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COURBES ENTIÈRES ET FEUILLETAGES HOLOMORPHES
Autor: Brunella, Marco
Kapitel: 4. Feuilletages sur le plan projectif
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64446

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Remarquons que dans cette preuve on a utilisé seulement le fait que Φ est un courant positif fermé $\mathcal{F}$-invariant et numériquement effectif; sa provenance d'une courbe entière est inessentielle. Remarquons aussi (voir [De2]) que l'effectivité numérique est automatique si $\Phi_{alg} = 0$.

Les théorèmes 1 et 2 et la relation $K_X = T^*_{\mathcal{F}} \otimes N^*_{\mathcal{F}}$, où K_X est le fibré canonique de X, impliquent:

COROLLAIRE 1. $c_1(X) \cdot [\Phi] \geq 0$. $\square$

Si Φ était une courbe algébrique lisse D on aurait la formule d'adjonction $c_1(X) \cdot [D] = [D]^2 + \chi(D)$ et le corollaire serait conséquence de $[D]^2 \geq 0$ (effectivité numérique) et $\chi(D) \geq 0$ (inégalité tautologique). Naïvement, dans tout ce qui précède on a donc remplacé la formule d'adjonction par sa version feuilletée $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{F}})$, $[D]^2$ par $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$, et $\chi(D)$ par $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot [\Phi]$.

COROLLAIRE 2. *X n'est pas de type général.* $\square$

En effet, le fibré canonique d'une surface de type général est presque ample (i.e., ample hors d'une collection finie de courbes rationnelles d'auto-intersection négative, qui sont négligeables car contractibles), et donc ([Mc]) on aurait $c_1(X) \cdot [\Phi] < 0$.

Ceci permet d'éviter, dans la preuve de McQuillan de la conjecture de Green-Griffiths, le recours au théorème de semi-positivité générique de Miyaoka [Mi]. Pour prouver cette conjecture McQuillan considère une courbe entière $f_0 \colon \mathbf{C} \to X_0$ à valeurs dans une surface de type général. Si $c_1^2(X_0) > c_2(X_0)$, il construit un revêtement ramifié $X \to X_0$ sur lequel le relevé $f \colon \mathbf{C} \to X$ est tangente à un feuilletage à singularités réduites. Puisque X est encore de type général, le corollaire 2 implique que f, et donc f_0, est dégénérée.

4. FEUILLETAGES SUR LE PLAN PROJECTIF

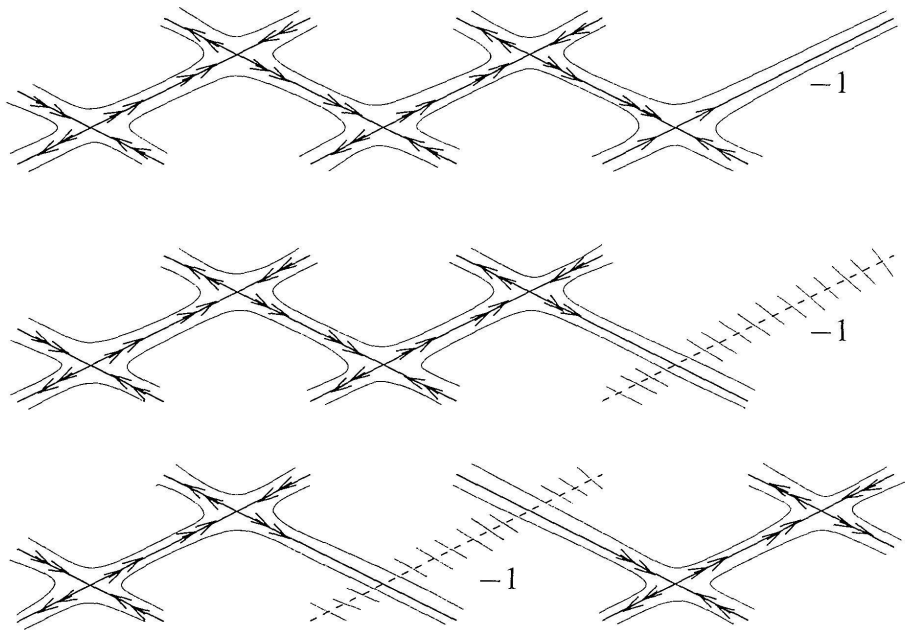
Dans cette dernière section nous allons démontrer le théorème énoncé dans l'introduction. Soit donc $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de $\mathbf{CP}^2$ dont toutes les singularités sont non nilpotentes. On a $T_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(1-d)$ et $N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}(2+d)$, où (par définition) d est le degré de $\mathcal{F}$.

Certaines singularités peuvent ne pas être réduites, notamment celles engendrées par un champ de vecteurs dont la partie linéaire admet les valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbf{Q}^+$. Si $\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$ la singularité est linéarisable, si au contraire $\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$ sa forme normale (Poincaré-Dulac, voir [CS]) est

$$(nz + aw^n)\, dw - w\, dz = 0$$

où $a \in \{0, 1\}$ et $n \in \{\lambda, \frac{1}{\lambda}\} \cap \mathbf{N}^+$.

Soit donc $X \xrightarrow{\pi} \mathbf{CP}^2$ la résolution (minimale) de ces singularités. Un calcul simple et explicite montre que chaque composante connexe du diviseur exceptionnel de π est une chaîne de courbes rationnelles qui contient une (-1)-courbe qui est soit invariante par le feuilletage relevé $\mathcal{G}$ (cas non linéarisable) soit transverse à ce même feuilletage (cas linéarisable). Les autres courbes de la chaîne sont $\mathcal{G}$-invariantes.



$\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$, $a = 1$

$\lambda \in \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$, $a = 0$

$\lambda \notin \mathbf{N}^+ \cup \frac{1}{\mathbf{N}^+}$

Décomposons le diviseur exceptionnel de π comme $F \cup D$, où $F = \bigcup_{j=1}^{l} F_j$ est l'union des (-1)-courbes qui ne sont pas $\mathcal{G}$-invariantes. On a alors [Br]

$$T_{\mathcal{G}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(F)$$
$$N_{\mathcal{G}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-2F - D)\,.$$

Soit $\Psi \in A^{1,1}(X)'$ le courant positif fermé engendré par le relevé de $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{CP}^2$ sur X. On suppose que f n'est pas dégénérée, et on normalise Ψ de manière telle que $c_1\big(\pi^*(\mathcal{O}(1))\big) \cdot [\Psi] = 1$. On obtient alors

$$c_1(T_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] = 1 - d + \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi]$$

$$c_1(N_{\mathcal{G}}) \cdot [\Psi] \leq 2 + d - 2 \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi]$$

(car $[\Psi] \cdot [D] \geq 0$), et les théorèmes 1 et 2 impliquent

$$\sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi] \geq d - 1$$

$$2 \sum_{j=1}^{l} [F_j] \cdot [\Psi] \leq d + 2$$

et enfin

$$d \leq 4 .$$

Ce qui prouve le théorème.

REMARQUE. Sans hypothèse sur les singularités de $\mathcal{F}$ le théorème devient évidemment faux, on peut par contre espérer affaiblir l'hypothèse $d \geq 5$ (par $d \geq 2$?).

RÉFÉRENCES

[Br] BRUNELLA, M. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30* (1997), 569–594.

[CS] CAMACHO, C. et P. SAD. Pontos singulares de equacões diferenciais analíticas. In: *16º Coloquio Brasileiro de Matemática.* IMPA, 1987.

[De1] DEMAILLY, J.-P. Variétés hyperboliques et équations différentielles algébriques. *Gaz. Math. 73* (1997), 3–23.

[De2] —— Courants positifs fermés et théorie de l'intersection. *Gaz. Math. 53* (1992), 131–159.

[GG] GREEN, M. and P. GRIFFITHS. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: *The Chern Symposium 1979.* Springer (1980), 41–74.

[Jo] JOUANOLOU, J.-P. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. *Math. Ann. 232* (1978), 239–245.

[LN] LINS NETO, A. Simultaneous uniformization for the leaves of projective foliations by curves. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25* (1994), 181–206.

[MR] MARTINET, J. et J.-P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non-linéaires du premier ordre. *Publ. IHES 55* (1982), 63–164.