2. Les espaces de Banach de distributions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Avant d'y parvenir, il nous faudra faire quelques rappels sur les espaces de Banach de distributions, en particulier sur leur dualité, et traiter le cas très particulier de la dimension 1.

NOTATIONS. Choisissons une fois pour toutes les fonctions usuelles de *troncation* et de *régularisation*. Ce sont des fonctions positives $\rho, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$\rho(x) = 1 \quad (\text{pour } |x| \leq 1/2)\,, \qquad \rho(x) = 0 \quad (\text{pour } |x| \geq 1)\,, \qquad \int \varphi(x)\,dx = 1\,;$$

nous poserons

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x}{k}\right), \qquad \varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)\,.$$

Les opérateurs de *translation* et de *dilatation* sont définis par:

$$\tau_t f(x) = f(x-t) \quad (t \in \mathbf{R}^n)\,, \quad h_\lambda f(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0).$$

On pose enfin $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.

2. LES ESPACES DE BANACH DE DISTRIBUTIONS

2.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Si E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, muni d'une norme complète rendant continue l'injection canonique $E \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, on dit que E est un *espace de Banach de distributions* (EBD). Notons d'ailleurs que toute injection canonique $E \hookrightarrow F$ entre deux EBD est nécessairement continue; c'est une conséquence immédiate du théorème du graphe fermé. En particulier, un sous-espace donné de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ possède *au plus une* structure d'EBD, à une équivalence de normes près.

PROPOSITION 1. *Si E est un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors E' s'identifie à un EBD. Si E et F sont des EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ comme sous-espace dense, alors $E' = F'$ si et seulement si $E = F$.*

Preuve. Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans E, l'application de restriction $u \mapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)}$ est linéaire, injective et continue de E' dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, de sorte qu'on peut identifier E' avec le sous-espace suivant de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$\left\{u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \,:\, \exists C > 0\,, \forall g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)\,, \quad |\langle u, g\rangle| \leq C \,\|g\|_E\right\}.$$

Si $E' \subset F'$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in E'$,

$$\|u\|_{F'} \leq C\,\|u\|_{E'}\,;$$

puisque

$$\|g\|_E = \sup\{|\langle u, g\rangle| \ : \ u \in E'\,,\ \|u\|_{E'} \leq 1\}\,,$$

il vient $\|g\|_E \leq C\,\|g\|_F$ pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, ce qui, par densité, entraîne $F \subset E$.

2.2 Échelles de régularité

Définition 1. Une suite $(E^m)_{m\in\mathbf{Z}}$ d'EBD est une *échelle de régularité* si, pour tous $m \in \mathbf{Z}$ et $j = 1, \ldots, n$:

$$\text{(i)} \quad E^{m+1} \subset E^m \quad \text{et} \quad \text{(ii)} \quad \partial_j\left(E^{m+1}\right) \subset E^m\,.$$

E^0 est appelé l'*origine* de l'échelle.

Si E est un EBD donné, il existe au moins une échelle de régularité d'origine E : c'est l'échelle de Sobolev définie par (1) et (2); on vérifie en effet ([3]) que $W^m(E)$ et $W^{-m}(E)$ sont des EBD pour les normes respectives :

$$\|f\|_{W^m(E)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \left\|f^{(\alpha)}\right\|_E\,,$$

$$\|f\|_{W^{-m}(E)} = \inf\left\{\sum_{|\alpha|\leq m} \|f_\alpha\|_E \ : \ f = \sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha^{(\alpha)}\right\}.$$

Dès que l'espace E est invariant sous l'effet des automorphismes linéaires de $\mathbf{R}^n$, l'espace $W^m(E)$ ($m \in \mathbf{Z}$) ne dépend pas du système de coordonnées par rapport auxquelles sont calculées les dérivées partielles.

Proposition 2. *On a $W^{m+k}(E) = W^m(W^k(E))$, quel que soit E, dès que les entiers m et k sont de même signe.*

Preuve. Elle repose sur la remarque élémentaire suivante : si $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$ et si l'entier m vérifie $0 < m < |\alpha|$, il existe $\beta \in \mathbf{N}^n$ tel que $\beta < \alpha$ et $|\beta| = m$. Les détails sont laissés au lecteur.

Définition 2. L'échelle de Sobolev d'origine E est dite *invariante* si elle vérifie la propriété (3), ce qui, d'après la proposition précédente, est équivalent à :

$$\text{(5)} \qquad W^{m-k}(E) = W^m(W^{-k}(E)) = W^{-k}(W^m(E)) \qquad (m > 0,\ k > 0)\,.$$

2.3 Dualité de l'échelle de Sobolev

On notera E_0 et $W_0^m(E)$ les fermetures respectives de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans E et dans $W^m(E)$.

PROPOSITION 3. *Soit E un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. On a alors:*

$$\text{(i)} \qquad \left(W_0^m(E)\right)' = W^{-m}\left((E_0)'\right) \qquad (m \geq 0),$$

$$\text{(ii)} \qquad \left(W_0^{-m}(E)\right)' \subset W^{m}\left((E_0)'\right) \qquad (m > 0).$$

Preuve. Voir [3]. Précisons que, dans l'ouvrage en question, l'inclusion

$$W^m\left((E_0)'\right) \subset \left(W_0^{-m}(E)\right)'$$

est donnée pour vraie; mais il y a une lacune dans la preuve: quand on décompose $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ sous la forme

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)}$$

où $g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, rien ne dit qu'on obtient ainsi toutes les décompositions possibles de g avec $g_\alpha \in E$! Une chose reste exacte cependant:

PROPOSITION 4. *Soit $m > 0$. Alors, pour tous $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $g \in W^{-m}(E)$, on a:*

$$|\langle g,f\rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \, \|g\|_{W^{-m}(E)} \,.$$

COROLLAIRE 1. *Soit $m > 0$. Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $W^m\left((E_0)'\right)$, alors*

$$\left(W_0^{-m}(E)\right)' = W^m\left((E_0)'\right) . \tag{6}$$

On a, par exemple, la propriété bien connue suivante:

$$\left(W^{-m}(L^p(\mathbf{R}^n))\right)' = W^m(L^{p'}(\mathbf{R}^n)),$$

pour $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$.

2.4 Les $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$-modules invariants par translation

Nous allons voir que l'identité (6) est vérifiée pour une classe assez vaste d'EBD invariants par translation.

On dit que E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$*-module* si, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $gf \in E$. Notons qu'alors l'opérateur linéaire $f \mapsto gf$ est borné sur E et donc que la fonction g admet une norme en tant que *multiplicateur ponctuel* de E :

$$\|g\|_{M(E)} = \sup\{\|gf\|_E \; : \; \|f\|_E \leq 1\}.$$

THÉORÈME 2. *Soit E un EBD satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(P_0) *$\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace dense de E ;*

(P_1) *pour tout $f \in E$ et $t \in \mathbf{R}^n$, on a $\tau_t f \in E$ et $\|\tau_t f\|_E = \|f\|_E$;*

(P_2) *E est un $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$-module et, pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, on a :*

$$\sup_{\lambda \geq 1} \|h_\lambda g\|_{M(E)} < +\infty .$$

Alors, pour $m \in \mathbf{Z}$,

1. *E' possède les propriétés (P_1) et (P_2);*
2. *$W^m(E)$ possède les propriétés (P_0), (P_1) et (P_2);*
3. *$\big(W^m(E)\big)' = W^{-m}(E')$.*

Preuve. Le fait que E' et $W^m(E)$ possèdent les propriétés (P_1) et (P_2) se vérifie sans difficulté. La preuve de la seconde assertion repose sur les résultats classiques suivants :

LEMME 1. *Si E vérifie (P_0) et (P_1), alors, pour tous $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $f \in E$, on a $g * f \in E$ et $\|g * f\|_E \leq \|g\|_1 \|f\|_E$; la même estimation est satisfaite dans E' et dans $W^m(E)$ $(m \in \mathbf{Z})$.*

LEMME 2. *Sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour tous $f \in E$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$,*

$$\lim_{k \to +\infty} f(h_k g) = g(0) f \qquad \textit{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} k^n (h_{1/k} g) * f = \left(\int g(x)dx \right) f$$

dans l'espace de Banach E.

A l'aide du lemme 2, on montre aisément que, pour $f \in W^m(E)$,

$$\lim_{k \to +\infty} f\rho_k = f \,, \qquad \lim_{k \to +\infty} \varphi_k * f = f$$

en norme $W^m(E)$; la densité de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $W^m(E)$ en découle aussitôt.

Il reste à prouver l'inclusion $W^m(E') \subset (W^{-m}(E))'$, pour $m > 0$. Soit f une distribution à support compact appartenant à $W^m(E')$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; en appliquant la proposition 4 à $f * \varphi_k$ et g, on obtient:

$$|\langle f * \varphi_k, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ;$$

puisque $\widetilde{\varphi}_k * g \to g$ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, il vient

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{W^m(E')} \|g\|_{W^{-m}(E)} ,$$

autrement dit $f \in W^{-m}(E)'$. Si f est un élément quelconque de $W^m(E')$, on approche f par les $f\rho_k$ et on conclut comme ci-dessus.

REMARQUE. L'étude de la dualité des $W^m(E)$ peut se conduire dans le cadre plus général de l'échelle de Sobolev associée à un C_0-groupe (voir le chapitre III de [1], notamment le théorème 3.3.28).

3. Résultats positifs en dimension un

THÉORÈME 3. *Soit E un EBD dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, ayant les propriétés* (P_0) *et* (P_1)*; soit $m > 0$. Alors*

$$E = W^{-m}(W^m(E)), \quad E' = W^{-m}(W^m(E')) .$$

Si de plus E satisfait (P_2)*, alors les échelles de Sobolev d'origines E et E' sont invariantes.*

Preuve. D'après le lemme 1, l'opérateur défini par

$$Tf = \int_0^\infty e^{-t} \tau_t f \, dt$$

est borné sur E. Puisque $(Tf)' = f - Tf$ pour $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, la même propriété est vraie au sens des distributions quel que soit $f \in E$. On en déduit aussitôt que T^m est un opérateur borné de E dans $W^m(E)$. Si $f \in E$ et $g = T^m(f)$, il vient

$$f = \sum_{j=0}^{m} C_m^j g^{(j)} ,$$

de sorte que f appartient à $W^{-m}(W^m(E))$. On peut aussi définir T sur E', à l'aide de la formule