2.3 Dualité de l'échelle de Sobolev

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

2.3 Dualité de l'échelle de Sobolev

On notera E_0 et $W_0^m(E)$ les fermetures respectives de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans E et dans $W^m(E)$.

Proposition 3. *Soit E un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. On a alors:*

$$\text{(i)} \qquad \left(W_0^m(E)\right)' = W^{-m}\left((E_0)'\right) \qquad (m \geq 0),$$

$$\text{(ii)} \qquad \left(W_0^{-m}(E)\right)' \subset W^{m}\left((E_0)'\right) \qquad (m > 0).$$

Preuve. Voir [3]. Précisons que, dans l'ouvrage en question, l'inclusion

$$W^m\left((E_0)'\right) \subset \left(W_0^{-m}(E)\right)'$$

est donnée pour vraie; mais il y a une lacune dans la preuve: quand on décompose $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ sous la forme

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)}$$

où $g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, rien ne dit qu'on obtient ainsi toutes les décompositions possibles de g avec $g_\alpha \in E$! Une chose reste exacte cependant:

Proposition 4. *Soit $m > 0$. Alors, pour tous $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $g \in W^{-m}(E)$, on a:*

$$|\langle g,f\rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \, \|g\|_{W^{-m}(E)} \, .$$

Corollaire 1. *Soit $m > 0$. Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $W^m\left((E_0)'\right)$, alors*

$$\left(W_0^{-m}(E)\right)' = W^m\left((E_0)'\right) . \tag{6}$$

On a, par exemple, la propriété bien connue suivante:

$$\left(W^{-m}(L^p(\mathbf{R}^n))\right)' = W^m(L^{p'}(\mathbf{R}^n)),$$

pour $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$.