

2.3 Dualité de l'échelle de Sobolev

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2.3 DUALITÉ DE L'ÉCHELLE DE SOBOLEV

On notera E_0 et $W_0^m(E)$ les fermetures respectives de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans E et dans $W^m(E)$.

PROPOSITION 3. *Soit E un EBD incluant $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. On a alors :*

$$(i) \quad (W_0^m(E))' = W^{-m}((E_0)') \quad (m \geq 0),$$

$$(ii) \quad (W_0^{-m}(E))' \subset W^m((E_0)') \quad (m > 0).$$

Preuve. Voir [3]. Précisons que, dans l'ouvrage en question, l'inclusion

$$W^m((E_0)') \subset (W_0^{-m}(E))'$$

est donnée pour vraie; mais il y a une lacune dans la preuve: quand on décompose $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ sous la forme

$$g = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha^{(\alpha)}$$

où $g_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, rien ne dit qu'on obtient ainsi toutes les décompositions possibles de g avec $g_\alpha \in E$! Une chose reste exacte cependant :

PROPOSITION 4. *Soit $m > 0$. Alors, pour tous $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $g \in W^{-m}(E)$, on a :*

$$|\langle g, f \rangle| \leq \|f\|_{W^m((E_0)')} \|g\|_{W^{-m}(E)}.$$

COROLLAIRE 1. *Soit $m > 0$. Si $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $W^m((E_0)')$, alors*

$$(6) \quad (W_0^{-m}(E))' = W^m((E_0)').$$

On a, par exemple, la propriété bien connue suivante :

$$(W^{-m}(L^p(\mathbf{R}^n)))' = W^m(L^{p'}(\mathbf{R}^n)),$$

pour $1 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$.