6. Questions ouvertes

1. Pour autant que nous le sachions, la non-inclusion

$$L^\infty(\mathbf{R}^2) \not\subset W^{-1}\big(W^1(L^\infty(\mathbf{R}^2))\big)\,,$$

ne se ramène pas, comme c'est le cas pour L^1, à des observations élémentaires sur les plongements de Sobolev.

2. Le théorème 4 laisse ouvert le problème d'une description explicite simple des espaces fonctionnels $W^1(W^{-1}(L^\infty(\mathbf{R}^n)))$ et $W^{-1}(W^1(L^1(\mathbf{R}^n)))$.

3. Dans le même ordre d'idée, on vérifie facilement que les EBD

$$E_m = W^m(W^{-m}(L^\infty(\mathbf{R}^n))) \qquad (m \geq 0)$$

forment une suite croissante de sous-espaces de $bmo(\mathbf{R}^n)$. Cette suite est-elle *strictement* croissante ? Peut-on décrire simplement le sous-espace $\bigcup_{m\geq 0} E_m$? Des questions homologues se posent pour la suite décroissante

$$W^{-m}(W^m(L^1(\mathbf{R}^n)) \qquad (m \geq 0)$$

de sous-espaces de $L^1(\mathbf{R}^n)$.

4. On peut conjecturer une réciproque de la proposition 5: *si E possède la propriété de Mitiagin-Ornstein, alors $E = W^1(W^{-1}(E))$*; cela reviendrait à dire que $W^1(W^{-1}(E))$ est le plus petit EBD incluant E et possédant la propriété de Mitiagin-Ornstein.

5. Peut-on trouver une «bonne» échelle de régularité d'origine L^1 ? Pour préciser la question, désignons par $\mathcal{E}$ la classe de tous les EBD de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Existe-t-il une famille $(S^m)_{m\in\mathbf{Z}}$ d'applications de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que:
- pour tout $E \in \mathcal{E}$, $(S^m(E))_{m\in\mathbf{Z}}$ est une échelle de régularité d'origine E,
- $S^{m+k}(L^1(\mathbf{R}^n)) = S^m(S^k(L^1(\mathbf{R}^n)))$ pour tout $(m,k) \in \mathbf{Z}^2$?

Références

[1] Amrein, W.O., Boutet de Monvel, A. et Georgescu, V. *C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians.* Birkhäuser, 1996.

[2] Boman, J. Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables. *Illinois J. Math. 16* (1972), 203–216.

[3] Bourdaud, G. *Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien.* Publ. Math. Univ. Paris VII, 23 (1987, 1995).