

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

THE SPECTRAL MAPPING THEOREM,  
NORMS ON RINGS, AND RESULTANTS

by D. LAKSOV, L. SVENSSON and A. THORUP

ABSTRACT. We give a short, simple and self-contained proof of the Spectral Mapping Theorem for matrices with entries in an arbitrary commutative ring. The result is placed in the wider framework of norms on algebras. It is shown that the Spectral Mapping Theorem follows from a uniqueness result for norms on polynomial rings in one variable. The results are used to generalize classical formulas for the resultant of polynomials.

1. INTRODUCTION

It is a well-known and useful result in spectral theory of complex finite dimensional vector spaces that if the characteristic polynomial of an  $n \times n$ -matrix  $M$  splits as  $P_M(t) = \det(tI_n - M) = \prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$  then, for any polynomial  $F(x)$ , we have that  $\det(tI_n - F(M)) = \prod_{i=1}^n (t - F(\lambda_i))$ . We call this result the Spectral Mapping Theorem, because it is similar to the Spectral Mapping Theorem for Banach algebras. Many proofs of the result for complex finite dimensional vector spaces are known, most of them based upon transforming the matrix into triangular form (see [B2], §5, Proposition 10, p.36), or using the Jordan canonical form for the matrix (see [L], Chapter XIV, §3, Theorem 3.10, p.566). The Theorem and its proofs are easily generalized to arbitrary fields, and therefore to integral domains. In our work on parameter spaces in algebraic geometry ([L-S], [S1], [S2]) we needed a generalization of the Spectral Mapping Theorem to matrices with entries in arbitrary commutative rings with unity. The only reference we could find to such a generalization was [L], Chapter XIV, §3, Theorem 3.10, p.566, where a proof is deduced from the theory of integral ring extensions. The difficult part of the proof is dismissed with the phrase “This is obvious to the reader who read the chapter on integral ring extensions, and the reader