

3. The Witt group of polynomial rings

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **46 (2000)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

COROLLARY 2.4. *Suppose that A is a ring with involution, in which 2 is invertible. Then*

$$H^2(\mathbf{Z}/2, K_0(A[t, t^{-1}])/K_0(A)) = H^2(\mathbf{Z}/2, K_{-1}(A)).$$

3. THE WITT GROUP OF POLYNOMIAL RINGS

THEOREM 3.1. *Let A be an associative ring with involution, in which 2 is invertible. Let ϵ be 1 or -1 and let W be the Witt group functor of ϵ -hermitian spaces. The natural homomorphism*

$$W(A) \longrightarrow W(A[t])$$

is an isomorphism.

Proof. It suffices to show that the homomorphism $W(A[t]) \rightarrow W(A)$ given by the evaluation at $t = 0$ is an isomorphism. Surjectivity is obvious. To prove injectivity let (P, α) be a space over $A[t]$ and $(P(0), \alpha(0))$ its reduction modulo t . Suppose that $(P(0), \alpha(0))$ is isometric to some hyperbolic space $H(Q)$. Choosing a projective module Q' such that $Q \oplus Q'$ is free and adding to (P, α) the space $H(Q'[t])$ we may assume that $P(0)$ is the hyperbolic space over a free module. The class of P in $K_0(A[t])/K_0(A) = N_+(A)$ is a symmetric element. By Corollary 2.4 it can be written as $a + a^*$, hence, adding to (P, α) a suitable free hyperbolic space, we may assume that (P, α) is of the form

$$H(A^n[t]) \perp (R \oplus R^*, \beta).$$

Let R' be an $A[t]$ -module such that $R \oplus R'$ is free. Adding to (P, α) the hyperbolic space $H(R')$ we are reduced to the case in which P is free and α is an invertible ϵ -hermitian matrix with entries in $A[t]$.

LEMMA 3.2. *Let $\alpha = \epsilon\alpha^* \in M_n(A[t])$ be any ϵ -hermitian matrix. There exist an integer m and a matrix $\tau \in \text{GL}_{n+2m}(A[t])$ (actually in $E_{n+2m}(A[t])$) such that*

$$\tau^* \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \chi \end{pmatrix} \tau = \alpha_0 + t\alpha_1,$$

where α_0 and α_1 are constant matrices and χ is a sum of hyperbolic blocks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon 1 & 0 \end{pmatrix}$ of various sizes.

Proof of the lemma. Write $\alpha = \gamma + \delta t^N$, where δ is constant and γ of degree less than N . Assume that N is at least 2. Since δ is ϵ -hermitian and 2 is invertible in A we can write $\delta = \sigma + \epsilon\sigma^*$. Then

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -\sigma^*t^{N-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma + \sigma t^N + \epsilon\sigma^*t^N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -\sigma t^{N-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is of degree $\leq N - 1$ and after $N - 1$ such transformations we get a linear matrix. \square

Writing $\alpha = \alpha_0 + t\alpha_1$ as $\alpha_0(1 + \nu t)$ we see immediately that, α being invertible, ν is nilpotent. The formal power series

$$\tau = (1 + \nu t)^{-1/2} = \sum \binom{-1/2}{k} (\nu t)^k$$

is a polynomial. From $\alpha = \epsilon\alpha^*$ we get $\alpha_0^* = \epsilon\alpha_0$ and $\nu^*\alpha_0^* = \epsilon\alpha_0\nu$. This implies that $\tau^*\alpha_0^* = \epsilon\alpha_0\tau$ and therefore

$$\tau^*\alpha\tau = \tau^*\alpha_0(1 + \nu t)\tau = \alpha_0\tau(1 + \nu t)\tau = \alpha_0.$$

This proves that (P, α) is Witt equivalent to $(P(0), \alpha(0))$ and is, therefore, hyperbolic. \square

4. THE WITT GROUP OF TORSION MODULES

Let M be a finitely generated right $A[t]$ -module and suppose that it is a t -torsion module and that it is projective as an A -module. Obviously, it will be finitely generated over A . We denote by M^\sharp the left $A[t]$ -module $\text{Hom}_{A[t]}(M, A[t, t^{-1}]/A[t])$ and we consider it as a right module through the involution on $A[t]$.

Recall that, as an A -module, the quotient $A[t, t^{-1}]/A[t]$ can be written as a direct sum

$$A[t, t^{-1}]/A[t] = At^{-1} \oplus At^{-2} \oplus \dots$$

Thus, to any $f \in \text{Hom}_{A[t]}(M, A[t, t^{-1}]/A[t])$ we can associate an A -linear map $f_{-1}: M \rightarrow A$, which is defined as the composite of f with the projection onto At^{-1} .