Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Autor: Bergeron, Nicolas

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64797

L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 109–137

PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

par Nicolas BERGERON

ABSTRACT. The notion of an l-geodesic cycle in a hyperbolic manifold generalises, in dimension l, that of a closed geodesic. In this note we study some topological properties of such cycles. Then we show that the existence of geodesic cycles of codimension 1 allows one to prove that there exist isospectral non isometric hyperbolic manifolds of every dimension. Finally, we give a simple criterion using geodesic cycles that ensures the existence of small eigenvalues of the Laplace operator in a finite cover of a hyperbolic manifold.

INTRODUCTION

Soit M une variété riemannienne.

DÉFINITIONS. On appelle *cycle géodésique de dimension* l dans M la donnée d'une immersion $i\colon F \to M$ d'une variété compacte F de dimension l dans M telle que pour tout x dans F, il existe un voisinage ouvert U de x dans F tel que $i(U)$ soit une sous-variété totalement géodésique de M. On dira qu'un tel cycle *se relève* à un revêtement $\widetilde{M}$ de M s'il existe un revêtement fini $\widetilde{F}$ de F auquel i se relève en une application $\widetilde{i}\colon \widetilde{F} \to \widetilde{M}$.

Dans cet article on étudie l'influence de l'existence de tels cycles dans les *variétés hyperboliques* (i.e. les variétés riemanniennes de courbure constante égale à -1), tant sur le plan topologique que géométrique. Notre premier théorème est une propriété topologique de ces cycles (une généralisation en dimension quelconque de résultats de Scott [Sc] et de Long [Lo]).

THÉORÈME 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

On connaît peu de choses sur la topologie des variétés hyperboliques. Il est donc naturel de s'intéresser dans un premier temps à leur homologie. Fixons-nous une variété hyperbolique M de volume fini de dimension n. Une conjecture attribuée, dans [Bo1], à Thurston affirme que M a un revêtement fini N avec un premier nombre de Betti non nul, $b_1(N) > 0$. Récemment, Lubotzky [Lu1] a montré, en utilisant la théorie de Bass-Serre d'actions de groupes sur les arbres, que si M contient une sous-variété (plongée) totalement géodésique de codimension 1, M vérifie la conjecture de Thurston. Lubotzky montre plus précisément que M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang 2. On peut en fait montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont deux sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Lorsque la variété ambiante est non compacte, on peut étendre le théorème 2 à des cycles généralisés de volume fini. En particulier on obtient une généralisation du théorème de Lubotzky, et les corollaires suivants (on dit d'une variété qu'elle a un premier nombre de Betti virtuel infini si pour tout entier $N > 0$, elle admet un revêtement fini avec un premier nombre de Betti supérieur à N).

COROLLAIRE 1. *Les variétés hyperboliques arithmétiques construites par Borel dans* [Bo2] *ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

COROLLAIRE 2. *Les variétés hyperboliques non arithmétiques construites par Vinberg dans* [Vin] *ou par Gromov et Piateski-Shapiro dans* [GPS] *ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

L'existence de cycles géodésiques dans M a aussi des conséquences pour le spectre de M et de ses revêtements.

Notre troisième théorème est le suivant :

THÉORÈME 3. *Soit M une variété hyperbolique compacte de dimension n. Si M contient un cycle géodésique de dimension $n-1$, alors M admet deux revêtements finis M_1 et M_2 isospectraux mais non isométriques.*

COROLLAIRE 3. *Pour tout n, il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension n (non nécessairement arithmétiques).*

Les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques ont été construits par M.-F. Vignéras [Vig] en dimensions 2 et 3; ce sont des variétés arithmétiques. R. Spatzier dans [Sp] a montré que pour $n > 26$ toute variété hyperbolique vérifie les conclusions du théorème 3. Enfin récemment A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques en dimension 3.

Dans [R], Randol pose le problème de l'existence de variétés hyperboliques compactes avec de *petites valeurs propres*, *i.e.* des valeurs propres du laplacien inférieures à $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$. L'existence de telles valeurs propres influe notamment sur le comportement asymptotique du nombre $N_T(x,y)$ (pour T proche de l'infini) de points de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ appartenant à la boule hyperbolique centrée en x de rayon T et se projetant dans M sur le même point que y. Randol montre par exemple que, pour $n=3$, la variance de $N_T(x,y)$ est, pour T proche de l'infini, de l'ordre de $\frac{e^{(1+\alpha)T}}{\alpha(1+\alpha^2)}$ (à une constante près et pour un certain $\alpha=\alpha(M)\in]0,1[$) si M a de petites valeurs propres et est un $O(Te^T)$ sinon. Dans [R], Randol montre qu'une variété hyperbolique qui a un premier nombre de Betti non nul admet un revêtement fini avec de petites valeurs propres (en fait arbitrairement petites). On peut démontrer un critère simple d'existence de petites valeurs propres dans un revêtement fini.

THÉORÈME 4. *Si M contient un cycle géodésique de dimension $k > \frac{n+1}{2}$, alors M admet un revêtement fini avec de petites valeurs propres.*

Ce critère simple permet notamment de montrer que toutes les variétés hyperboliques compactes connues de dimension $n \geq 6$ ($n \neq 7$) admettent des revêtements finis avec de petites valeurs propres, sans faire appel aux difficiles avancées vers la conjecture de Thurston.

Organisation de l'article. La première section est consacrée à la démonstration d'un lemme « à la Selberg » qui généralise le fait que tout sous-groupe de $GL_n(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini. Dans une deuxième section, on applique ce lemme à la démonstration des théorèmes 1 et 2. Dans une troisième section on traite le cas des variétés non compactes de volume fini et on rappelle les diverses constructions connues de variétés hyperboliques de volume fini en constatant que ces théorèmes s'appliquent à un certain nombre d'entre elles. Dans la quatrième section on montre le théorème 3 à l'aide du théorème 2 et de la méthode de Sunada [Sun]. Dans la cinquième et dernière section, étant donné une variété hyperbolique M de volume fini on construit, à l'aide du lemme de la première section, une suite de revêtements finis de M qui converge sur tout compact vers une variété que l'on appelle *variété tube*. À l'aide de travaux de Sullivan [Sul1], on peut majorer la première valeur propre du laplacien de cette variété tube, d'où l'on déduit le théorème 4. On conclut cet article par un appendice consacré au calcul explicite du spectre des variétés tubes $\mathbf{H}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau cocompact de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ $(k < n)$. Calcul élémentaire qui permet notamment d'éviter le recours aux travaux de Sullivan dans la démonstration du théorème 4.

REMERCIEMENTS. Le théorème 3 répond à une question de R. Brooks, qui a bien voulu s'intéresser aux premières versions de cet article; je l'en remercie. La démonstration du théorème 4 doit beaucoup à l'article [BLS], qui m'a été expliqué par M. Burger; je l'en remercie. Merci à Damien Gaboriau pour sa relecture attentive. Une erreur m'a été aimablement signalée et corrigée par le referee, je l'en remercie. Enfin, je suis particulièrement redevable à J.-P. Otal pour ses nombreux conseils et encouragements.

1. TOPOLOGIE DES SOUS-GROUPES D'INDICE FINI ET GROUPES ALGÉBRIQUES

On appelle *topologie des sous-groupes d'indice fini* d'un groupe Γ (cf. [S]), la topologie sur Γ pour laquelle les sous-groupes d'indice fini de Γ forment une base de voisinages de l'élément neutre e. On peut restreindre la base de voisinages de e aux sous-groupes distingués d'indices finis de Γ (quitte à prendre l'intersection des conjugués). Notons H^* l'adhérence d'un sous-groupe H de Γ pour cette topologie, on a:

$$H^* = \bigcap_{\substack{N \triangleleft \Gamma \\ [\Gamma:N]<+\infty}} HN .$$

Enfin, on dit d'un groupe de type fini Γ qu'il est *résiduellement fini* si l'élément neutre de Γ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indices finis de Γ.

LEMME 1. *Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *des éléments non nuls d'un sous-anneau* A *de* $\mathbf{C}$ *finiment engendré sur* $\mathbf{Z}$. *Alors, il existe un corps fini* F *et un morphisme* $\eta \colon A \longrightarrow F$ *tels que pour tout* i, $\eta(a_i) \neq 0$.

Démonstration. Le théorème de normalisation de Noether (cf. [AM; p.70]) affirme qu'il existe $s \in \mathbf{Z}$, $s \neq 0$ et $x_1, \ldots, x_k$ dans A qui sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{s}]$ tels que A est entier sur $B = \mathbf{Z}[\frac{1}{s}][x_1, \ldots, x_k]$. Soit $a = a_1 \cdots a_n$. Soit p un entier premier qui ne divise pas s. On a un morphisme $\mathbf{Z}[\frac{1}{s}] \longrightarrow \mathbf{F}_p$ que l'on peut clairement étendre à B en envoyant les x_i sur des éléments quelconques. Puis, quitte à prendre un p plus grand, on peut supposer que les coefficients du polynôme annulateur de a sur B sont tous envoyés sur des éléments non nuls de $\mathbf{F}_p$. Ce polynôme s'envoie alors sur un polynôme sur $\mathbf{F}_p$ qui a une racine non triviale dans une certaine extension de $\mathbf{F}_p$. Ainsi, on peut étendre le morphisme $B \to \mathbf{F}_p$ en un morphisme $B[a] \longrightarrow \mathbf{F}_p(a')$ de manière à ce que l'image de a soit un élément non nul. Comme A est finiment engendré, de même manière, on peut obtenir $\eta \colon A \longrightarrow F$ où F est une extension finie de $\mathbf{F}_p$. $\square$

On a alors (cf. aussi [MS]):

LEMME PRINCIPAL. *Soient* H *un sous-groupe algébrique de* $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ *et* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ *de type fini. Notons* $\Lambda = H \cap \Gamma$. *Alors* Λ *est fermé dans* Γ *pour la topologie des sous-groupes d'indices finis de* Γ, *i.e.*

$$\Lambda^* = \Lambda .$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\Lambda^* \subset H$. Soit $x \in \Gamma$; nous allons montrer que si $x \notin H$, alors $x \notin \Lambda^*$.

Puisque H est Zariski-fermé dans $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ et $x \in \mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$, il existe un polynôme P sur la variété algébrique $\mathrm{GL}_N(\mathbf{C})$ identiquement nul sur H et tel que $P(x)$ soit non nul. Le groupe Γ étant de type fini, il existe un sous-anneau A de $\mathbf{C}$ finiment engendré sur $\mathbf{Z}$ tel que Γ soit un sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(A)$ et que P soit à coefficients dans A. Le lemme 1 implique l'existence d'un morphisme $\tilde{\eta} \colon \mathrm{GL}_N(A) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(F)$ tel que $\bar{P}(\tilde{\eta}(x)) \neq 0$ (où $\bar{P}$ est le polynôme à coefficients dans F obtenu en appliquant η aux coefficients de P). En se restreignant à Γ, on obtient donc un morphisme ψ de Γ dans $\mathrm{GL}_N(F)$ qui est un groupe fini. De plus, $\bar{P}(\psi(\Lambda)) = 0$ (car $\Lambda \subset H$). Donc, $\psi(x)$ n'appartient pas à $\psi(\Lambda)$. Soit alors $L = \ker \psi$. Le sous-groupe L est distingué et d'indice fini dans Γ, et $x \notin \Lambda L$ (car $\psi(\Lambda L) = \psi(\Lambda)$). Comme $\Lambda^* \subset \Lambda L$, x n'appartient pas à Λ^*. $\square$

Appliqué à $H = \{e\}$, le lemme principal redonne le fait (dû à Mal′cev [Ma]) que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini.

2. Sur la topologie des cycles géodésiques

Nous allons appliquer le lemme principal aux cycles géodésiques dans des variétés hyperboliques.

Définitions. *Variétés hyperboliques* (cf. [Th], [CEG] ou [Rat]). Soit $\mathbf{H}^n$ l'*espace hyperbolique*, i.e. l'unique variété riemannienne de dimension n simplement connexe, complète et de courbure constante égale à -1. Une *variété hyperbolique* (de dimension n) M est une variété riemannienne complète de courbure constante égale à -1. Une telle variété est isométrique au quotient $\mathbf{H}^n/\Gamma$ de l'espace hyperbolique par un *groupe kleinien, i.e.* un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$. Par commodité, toutes les variétés hyperboliques que nous considérerons seront supposées *orientées*. Alors, $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ où Γ est un groupe kleinien contenu dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, le sous-groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbf{H}^n$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe $\mathbf{P}\mathrm{SO}(n,1)$ de $\mathrm{O}(n,1)$ (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Étant donné un groupe kleinien, on notera $L(\Gamma)$ l'*ensemble limite* de Γ, *i.e.* la fermeture, dans la sphère à l'infini $\mathbf{S}^{n-1}_\infty$, de l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de Γ dans $\mathbf{H}^n$.

Théorème 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

Remarque. Le théorème 1 était déjà connu en dimension deux [Sc] et en dimension trois [Lo].

Démonstration. Soit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ une variété hyperbolique avec Γ un groupe kleinien de type fini. Soit $i_0 \colon F_0 \to M$ un cycle géodésique de dimension l. Soit $\widetilde{i_0} \colon \widetilde{F_0} \to \mathbf{H}^n$ un relevé de i_0 au revêtement universel $\widetilde{F_0}$ de F_0 (que l'on suppose connexe). Puisque i_0 est une immersion localement totalement géodésique, il en est de même pour $\widetilde{i_0}$. L'application i_0 est propre donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ est complet dans $\mathbf{H}^n$. Donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ coïncide avec un sous-espace totalement géodésique de dimension l dans $\mathbf{H}^n$. L'application $\widetilde{i_0}$ est alors un revêtement d'image simplement connexe donc un homéomorphisme sur son image. Et, quitte à conjuguer, on peut identifier le revêtement universel de F_0 avec le sous-espace $\mathbf{H}^l$ de $\mathbf{H}^n$. De plus, i_0 est injective au niveau des groupes fondamentaux; on note $\Lambda_0 = i_{0*}(\pi_1 F_0)$. On a alors

$$\Lambda_0 \subset \Gamma \cap \mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)\,,$$

où $\mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$, le stabilisateur de $\mathbf{H}^l$ dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, est égal à un sous-groupe d'indice fini du produit du groupe $\mathrm{O}(l,1)$ par un groupe de rotations compact que l'on note C. Soit $\Lambda = \Gamma \cap \mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$. Montrons que la variété $F = \mathbf{H}^l/\Lambda$ (qui est finiment revêtue par F_0) se plonge dans un revêtement fini de la variété $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$. Soit i l'immersion canonique de F dans M. Soit D un domaine fondamental (compact) pour l'action de Λ sur $\mathbf{H}^l$. L'action de Γ sur $\mathbf{H}^n$ est propre. Donc l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap D \neq \varnothing\}$$

est fini. En particulier $E - \Lambda$ est un sous-ensemble fini de Γ. Mais, d'après le lemme principal (appliqué à $H = \mathrm{O}(l,1) \times C$ et $\Gamma = \Gamma$),

$$\Lambda^* = \Lambda\,,$$

pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Donc, il existe un sous-groupe $\widehat{\Gamma}$ d'indice fini dans Γ qui contient Λ et tel que $E \cap \widehat{\Gamma} = E \cap \Lambda$. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M et contient F comme sous-variété plongée totalement géodésique. Or le plongement canonique $\widehat{i}$ de F dans $\widehat{M}$ relève i. Donc le cycle donné par i_0 se relève à $\widehat{M}$ en un cycle dont l'image égale à $\widehat{i}(F)$ est plongée. $\square$

REMARQUE. En remplaçant $\mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^l)$ par $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^l) \times C$ dans la démonstration du théorème 1, on peut montrer que sous les hypothèses du théorème 1 on peut relever le cycle en un cycle dont l'image est une sous-variété *orientée*.

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont des sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Démonstration. Soit M une variété hyperbolique de volume fini de dimension n qui contient un cycle géodésique de dimension $n-1$. Le groupe fondamental de M est de type fini. D'après le théorème 1, on peut donc supposer que M contient une sous-variété orientée plongée totalement géodésique $F = \mathbf{H}^{n-1}/\Lambda$ (i.e. que le cycle est d'image plongée dans M).

Montrons que quitte à passer à un revêtement fini de M, on peut supposer que F est non séparante (i.e. que le cycle se relève en un cycle non homologue à zéro). Supposons que F sépare M en M_+ et M_-. Le théorème de Van Kampen implique que le groupe fondamental Γ de M se décompose en un produit amalgamé

$$\Gamma = A *_\Lambda B,$$

où A (resp. B) est le groupe fondamental de M_+ (resp. M_-). Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux éléments de Γ dont aucune puissance n'appartienne à Λ. Comme dans la démonstration du théorème 1, le lemme principal implique que le sous-groupe Λ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Soit K un sous-groupe de Γ d'indice fini tel que K contienne Λ mais ne contienne ni a ni b. Soit $\widehat{\Gamma}$ l'intersection de tous les conjugués de K dans Γ. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M auquel la variété F se relève en une sous-variété non séparante.

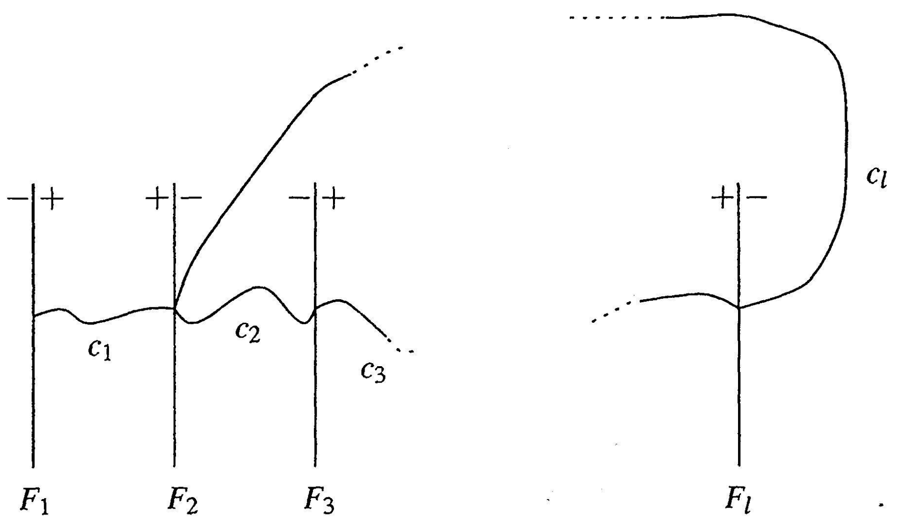

FIGURE 1

F_l est non séparante

En effet, soient α, β deux lacets dans M représentant respectivement a et b et basés en un point $x_0 \in F$. On construit par récurrence une famille finie de relevés de α et β : $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\alpha}_l\}$ (ou $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\beta}_l\}$) et l relevés disjoints de F : $F_1, \ldots, F_l$ ($l \in \mathbf{N}$) de manière à ce que c_i joigne F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l joigne F_l à F_{i_0} pour un certain $1 \leq i_0 \leq l$ (le revêtement est fini). Puisque ni α ni β

ne se relève, $i_0 < l$ et le lacet $c_{i_0} . c_{i_0+1} \dots c_l$ a un degré d'intersection congru à 1 modulo 2 avec F_l. Dans la suite on suppose que F est non séparante dans M.

Concluons la démonstration du théorème 2. On a un morphisme canonique p de Γ sur $\mathbf{Z}$ dont le noyau contient Λ, le groupe fondamental de F : $0 \to (\Lambda \subset) \ker(p) \to \Gamma \to \mathbf{Z} \to 0$. Le noyau $\ker(p)$ de p est distingué dans Γ, donc son ensemble limite $L(\ker(p))$ coïncide avec celui de Γ : $\mathbf{S}^{n-1}_\infty = L(\Gamma)$. Mais puisque $\Lambda \subset \mathrm{Stab}(\mathbf{H}^{n-1})$, l'ensemble limite $L(\Lambda)$ de Λ est inclus dans $\mathbf{S}^{n-2}_\infty$, donc $\ker(p)$ contient un élément a de Γ dont aucune puissance n'appartient à Λ. Soit $b \in \Gamma$ tel que $p(b) = 1$; dans la suite on suppose que b peut être représenté par un lacet rencontrant F en un unique point. On applique le lemme principal pour obtenir l'existence d'un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ de Γ d'indice fini ne contenant pas a. La variété $\widetilde{M} = \mathbf{H}^n/\widetilde{\Gamma}$ est un revêtement fini de M. Et la variété F admet deux relevés disjoints dans $\widetilde{M}$ dont l'union est non séparante. En effet, soient α un lacet dans M représentant a et β un lacet dans M représentant b et rencontrant F en un unique point. Soit c_1 un relevé de α allant d'un relevé F_1 de F à un relevé disjoint F_2 de F. On construit par récurrence des relevés $c_2, \dots, c_l$ de β et des relevés disjoints $F_3, \dots, F_l$ de F ($l \in \mathbf{N}$) de manière à ce que c_i soit un chemin allant de F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l un chemin de F_l à F_{i_0} avec $1 \leq i_0 \leq l$. Le lacet $c_{i_0}.c_{i_0+1} \dots c_l$ a un nombre d'intersection égal à 1 modulo 2 avec F_l et à 0 modulo 2 avec F_1. Donc $F_1 \cup F_l$ est non séparante dans $\widetilde{M}$. □

COROLLAIRE. *Soit M une variété hyperbolique de volume fini contenant un cycle géodésique de codimension 1. Alors le groupe fondamental de M contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre de rang deux.*

Démonstration. Conservons les notations de la démonstration précédente. Alors, $\widetilde{\Gamma} \cong \pi_1 \widetilde{M}$ se surjecte sur un groupe libre de rang deux. En effet, soient $C_1 \cong F_1 \times [-1, 1]$ et $C_l \cong F_l \times [-1, 1]$ deux voisinages colliers de F_1 et F_l dans $\widetilde{M}$. On construit une application continue de $\widetilde{M}$ sur un bouquet de deux cercles en projetant tous les points de $M - (C_1 \cup C_l)$ sur le point base du bouquet et chaque intervalle $x \times [-1, 1]$ sur la première boucle lorsque $x \in F_1$ et sur la deuxième lorsque $x \in F_l$. Au niveau des groupes fondamentaux, cette application induit une surjection de $\widetilde{\Gamma}$ sur le groupe libre de rang deux. En particulier sous les hypothèses du théorème 2, M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux.

3. Extension au cas des cycles généralisés

Soit M une variété hyperbolique de volume fini de dimension n. Les théorèmes 1 et 2 de la section précédente admettent des généralisations dans le cas de cycles non compacts.

DÉFINITIONS. On appelle *cycle géodésique généralisé de dimension l* dans M la donnée d'une immersion propre $i\colon F \to M$ d'une variété F de dimension l dans M telle que pour tout x dans F, il existe un voisinage ouvert U de x dans F tel que $i(U)$ soit une sous-variété totalement géodésique de M. On dira qu'un tel cycle *se relève* à un revêtement $\widetilde{M}$ de M s'il existe un revêtement fini $\widetilde{F}$ de F auquel i se relève en une application $\widetilde{i}\colon \widetilde{F} \to \widetilde{M}$.

Lorsque la variété M est compacte, les cycles géodésiques généralisés sont des cycles géodésiques. Dans la suite on suppose donc que M n'est pas compacte. Le lemme de Margulis ([Th], [CEG], [Rat]) implique que M est réunion d'une sous-variété compacte à bord M_0 et d'un nombre fini de composantes de la forme $V \times [0, +\infty[$ où V est une variété plate compacte de dimension $n-1$. Soit $i\colon F \to M$ un cycle géodésique généralisé de dimension l. De la même manière qu'au début de la démonstration du théorème 1, on peut supposer que

$$F = \mathbf{H}^l/\Lambda \qquad \text{avec} \qquad \Lambda = \Gamma \cap \mathrm{Stab}(\mathbf{H}^l)$$

et que i est l'immersion canonique.

LEMME 3. *La variété hyperbolique F est réunion d'une sous-variété compacte à bord F_0 et d'un nombre fini de composantes de la forme $W \times [0, +\infty[$ où W est une variété plate compacte de dimension $l-1$. En particulier, si $l \geq 2$, F est de volume fini. De plus, étant donnée une composante connexe $W \times [0, +\infty[$ de $F - F_0$, il existe une composante connexe $V \times [0, +\infty[$ de $M - M_0$ telle que la restriction de i à $W \times [0, +\infty[$ soit de la forme $i(w, r) = (j(w), r)$ où $j\colon W \to V$ est un cycle géodésique.*

Démonstration. Notons $F_0 = i^{-1}(M_0)$. La sous-variété F_0 est compacte à bord dans F. Chaque composante du bord de F_0 s'envoie dans une composante du bord de M_0. Or i est propre donc F_0 n'a qu'un nombre fini de composantes de bord. Passons maintenant au revêtement universel $\mathbf{H}^n$. On identifie toujours $\mathbf{H}^l$ avec le revêtement universel de F. Soit D un domaine de Dirichlet pour l'action de Λ sur $\mathbf{H}^l$. Soit D_0 l'ensemble des points de D au-dessus de F_0.

Soit D_1 une composante connexe de $\overline{D - D_0}$. L'image de D_1 dans M est incluse dans une composante connexe de $M - M_0$ que nous noterons C. Le fait que C soit de la forme $V \times [0, +\infty)$ implique que

(i) dans les coordonnées du demi-espace, on peut supposer que $D_1 = \Delta \times [a, +\infty)$ où Δ est inclus dans un domaine fondamental pour l'action de Γ_∞ (le stabilisateur du point à l'infini) par isométries sur l'horosphère $y = a$ (munie de sa structure euclidienne induite);

(ii) l'action de Γ sur l'horoboule $\mathbf{E}^{n-1} \times [a, +\infty)$ respecte la structure produit; et

(iii) $\Delta \subset \mathbf{E}^{l-1} \times \{a\} (\subset \mathbf{E}^{n-1} \times \{a\})$.

Alors, $\Lambda_\infty = \Gamma_\infty \cap \mathrm{Isom}(\mathbf{E}^{l-1})$. Donc D_1 est au-dessus d'une composante de la forme $W \times [0, +\infty)$ où $W = \mathbf{E}^{l-1}/\Lambda_\infty$. Et l'immersion totalement géodésique canonique $j \colon W \to V = \mathbf{E}^{n-1}/\Gamma_\infty$ convient. $\square$

THÉORÈME 1′. *Tout cycle géodésique généralisé dans une variété hyperbolique de volume fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

Démonstration. On conserve les notations du début de cette section. Passons au revêtement universel $\mathbf{H}^n$. On identifie toujours $\mathbf{H}^l$ avec le revêtement universel de F. Soit D un domaine de Dirichlet pour l'action de Λ sur $\mathbf{H}^l$. Soit D_0 l'ensemble des points de D au-dessus de F_0. Le groupe Γ agit proprement sur $\mathbf{H}^n$ et D_0 est compact donc $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D_0 \cap D_0 \neq \varnothing\}$ est fini. Or le lemme 3 implique que $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap D \neq \varnothing\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D_0 \cap D_0 \neq \varnothing\}$. On conclut alors de la même manière que dans la preuve du théorème 1. $\square$

Enfin la preuve du théorème 2 implique le théorème suivant.

THÉORÈME 2′. *Tout cycle géodésique généralisé de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont des sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Comme à la section précédente, on peut remarquer que les conclusions du théorème 2′ impliquent que le revêtement fini a un groupe fondamental qui se surjecte sur un groupe libre de rang deux.

Rappelons brièvement les constructions connues de variétés hyperboliques de volume fini (cf. [Vin]).

1. *Variétés arithmétiques «standard» construites par Borel dans* [Bo2]. Soit K un corps de nombres totalement réel de degré m sur $\mathbf{Q}$, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers et $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ les plongements de K dans $\mathbf{R}$. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 - a_{n+1} x_{n+1}^2$ une forme quadratique diagonale avec $a_i \in K$. On suppose que ${}^{\sigma_1}f$ a pour signature $(n, 1)$ et que ${}^{\sigma_i}f$ est définie positive pour $i = 2, 3, \ldots, m$. Le sous-groupe $\Gamma(f)$ de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O})$ préservant f s'identifie alors à un réseau de $\mathrm{O}(n, 1)$ (cf. [Bo2]). Si $\Gamma \subset \Gamma(f)$ est un sous-groupe d'indice fini sans torsion inclus dans $\mathbf{PSO}(n, 1)$, alors il agit librement sur $\mathbf{H}^n$ et l'espace quotient $\mathbf{H}^n/\Gamma$ est une *variété arithmétique standard* (de volume fini). Pour un tel groupe Γ soit $\Gamma_0 \subset \Gamma$ le sous-groupe stabilisant le plan $x_1 = 0$. L'image de Γ_0 dans $\mathbf{PSO}(n, 1)$ donne alors un cycle géodésique $\mathbf{H}^{n-1}/\Gamma_0 \to \mathbf{H}^n/\Gamma$ peut-être généralisé.

COROLLAIRE 1. *Les variétés hyperboliques arithmétiques construites par Borel dans* [Bo2] *ont un premier de Betti virtuel infini.*

On a appelé *premier nombre de Betti virtuel* d'une variété M la borne supérieur de l'ensemble des premiers nombres de Betti des revêtements finis de M. Le corollaire 1 se déduit du théorème $2'$ en remarquant que le groupe libre de rang 2 $\langle \alpha, \beta \rangle$ a un sous-groupe d'indice fini libre de rang $\geq N$ pour tout $N \in \mathbf{N}$.

2. *Variétés hybrides.* Dans [GPS], Gromov et Piateski-Shapiro présentent une nouvelle construction de variétés hyperboliques en découpant et en recollant des variétés arithmétiques standard suivant des sous-variétés (plongées) totalement géodésiques de codimension un. Par construction ces variétés contiennent une sous-variété totalement géodésique de codimension 1.

3. *Groupes engendrés par des réflexions.* Pour $n \geq 4$, tous les exemples connus de variétés hyperboliques (de volume fini) non arithmétiques sont soit des variétés hybrides soit des variétés obtenues comme quotient de $\mathbf{H}^n$ par un groupe Γ commensurable à un groupe engendré par des réflexions (cf. [Vin]). À indice fini près on peut supposer que Γ est normalisé par une réflexion τ. Cette réflexion τ agit alors sur la variété $\mathbf{H}^n/\Gamma$ et l'ensemble de ses points fixes forme une sous-variété totalement géodésique de codimension 1.

COROLLAIRE 2. *Les variétés hyperboliques construites par Vinberg dans* [Vin] *ou par Gromov et Piateski-Shapiro dans* [GPS] *ont un premier nombre de Betti virtuel infini.*

4. *Variétés hyperboliques de dimension* 3. En dimension trois, les variétés qui vérifient les hypothèses du théorème d'hyperbolisation de Thurston ou qui sont obtenues par le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique [Th] fournissent une myriade d'exemples de variétés hyperboliques pour lesquelles la conjecture de Thurston demeure ouverte. Dans [Lu1], Lubotzky pose la question de savoir si les 3-variétés hyperboliques non compactes de volume fini (dont on sait qu'elles vérifient la conjecture de Thurston, cf. [He]) admettent un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux. Signalons que, dans [CLR], Cooper, Long et Reid répondent par l'affirmative à ce problème.

5. *Variétés arithmétiques « non standard ».* En dimension impaire il existe des variétés arithmétiques non standard (toutes compactes). On en esquisse la construction à la section 5. Les théorèmes précédents ne s'appliquent pas à celles-ci en raison de l'absence de cycles géodésiques de codimension 1. La conjecture de Thurston est néanmoins vérifiée pour la plupart de ces variétés (cf. [Li], [RV], [LM] et [Lu2]).

4. VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES ISOSPECTRALES

Soit M_0 une variété hyperbolique compacte de dimension n. On suppose que M_0 contient un cycle géodésique de dimension $n-1$. Le lemme suivant découle du théorème 2.

LEMME 4. *Il existe un revêtement fini M de M_0 tel que*

1) *M contient deux sous-variétés plongées totalement géodésiques disjointes F_1 et F_2 ;*
2) *M contient deux lacets fermés disjoints γ_1 et γ_2 ;*
3) *pour $i=1,2$, γ_i rencontre F_i en un et un seul point;*
4) *les ensembles $\gamma_1 \cap F_2$ et $\gamma_2 \cap F_1$ sont vides;*
5) *il existe une isométrie φ de M qui permute F_1 et F_2.*

Démonstration. D'après le théorème 2, quitte à remplacer M_0 par un revêtement fini que nous noterons toujours M_0, on peut supposer qu'il existe deux sous-variétés totalement géodésiques orientées F et V dans M_0 dont l'union est non séparante. Le nombre d'intersection homologique entre un lacet fermé de M_0 et la sous-variété V induit un morphisme surjectif p_1

du groupe fondamental $\pi_1(M_0)$ de M_0 dans $\mathbf{Z}$. Soit n_1 un entier non nul. Soit M le revêtement fini (cyclique) galoisien de M_0 associé au sous-groupe $p_1^{-1}(n_1\mathbf{Z})$ de $\pi_1(M_0)$: le groupe de Galois de ce revêtement est isomorphe à $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$. Soit γ un lacet fermé dans M_0 intersectant l'ensemble $F \cup V$ en un unique point qui appartient à F. Le lacet γ et la variété F se relèvent au revêtement M. Soit F_1 un relevé arbitraire de F. On suppose n_1 pair. Soit φ l'isométrie de M induite par la transformation de revêtement associée à l'élément $\frac{n_1}{2}$ du groupe $\mathbf{Z}/n_1\mathbf{Z}$. Soit $F_2 = \varphi(F_1)$. La sous-variété F_2 est un relevé de F et l'isométrie φ permute F_1 et F_2. De plus il existe une constante c_0 indépendante de n_1 telle que $d(F_1, F_2) > c_0 n_1$. Donc, pour n_1 suffisamment grand, il existe deux relevés γ_1, γ_2 de γ dans M tels que les ensembles $\gamma_1 \cap F_2$ et $\gamma_2 \cap F_1$ soient vides. Ce qui achève la démonstration du lemme 4. □

DÉFINITION. Soit γ une géodésique fermée dans une variété hyperbolique. On dira que γ est *d-réductible* si γ est librement homotope à un produit de lacets pointés tous librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que d.

Remarquons dès maintenant que cette propriété est invariante par isométries.

Soit M la variété obtenue dans le lemme 4. Soit W la variété compacte à bord obtenue en découpant M le long de F_1 et de F_2. Soit d un réel supérieur ou égal à la longueur de γ_1 et de γ_2 tel que toutes les géodésiques de W soient d-réductibles (un tel d existe car la variété W est compacte). Soit δ le diamètre de la variété W.

LEMME 5. *Il existe $L > 0$ (que l'on peut choisir arbitrairement grand) et un revêtement fini $\widetilde{M}$ de M tels que*

1) *$\widetilde{M}$ contient deux sous-variétés disjointes totalement géodésiques $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ dont l'union est non séparante;*

2) *les géodésiques de l'ensemble $C_i = \{$géodésiques fermées rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale$\}$ $(i = 1, 2)$ rencontrent l'ensemble $\widetilde{F}_1 \cup \widetilde{F}_2$ en un et un seul point qui, de plus, appartient à $\widetilde{F}_i$;*

3) *l'ensemble C des géodésiques fermées de longueur L qui ne sont pas d-réductibles est égal à la réunion disjointe de C_1 et de C_2 ;*

4) *deux géodésiques quelconques dans C sont à distance plus petite que δ.*

Démonstration. Le corollaire qui suit le théorème 2 montre que les sous-variétés F_1 et F_2 de M permettent de construire une application continue f de M sur un bouquet de deux cercles. Soit $x_0 \in M$ un point n'appartenant pas à $F_1 \cup F_2$. L'application f induit un morphisme surjectif p_2 du groupe fondamental $\pi_1(M, x_0)$ sur le groupe libre de rang deux $\langle a, b \rangle$, où chaque générateur correspond à une boucle du bouquet de cercles. Soit n_2 un entier positif non nul. Soit G le sous-groupe

$$\langle a^{n_2}, aba^{-1}, a^2ba^{-2}, \ldots, a^{n_2-1}ba^{-n_2+1}, b^{n_2}, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, \ldots, b^{n_2-1}ab^{-n_2+1} \rangle$$

du groupe $\langle a, b \rangle$. Soit $\widetilde{M}$ le revêtement fini de M associé au sous-groupe $p_2^{-1}(G)$ de $\pi_1(M, x_0)$; c'est un revêtement de degré $2n_2 - 1$ qui n'est pas galoisien. Le revêtement du bouquet de cercles associé au sous-groupe G est un graphe $\mathcal{G}$ décrit dans la figure 2 (lorsque $n_2 = 5$).

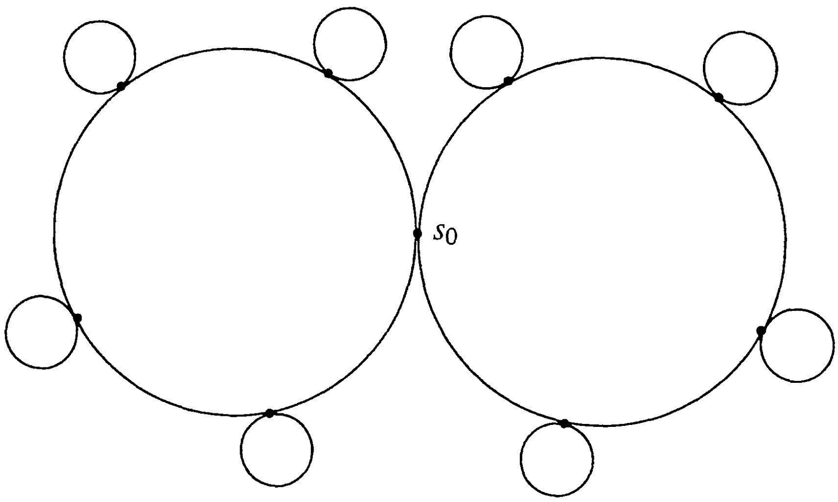

FIGURE 2
Le graphe $\mathcal{G}$

On peut construire le revêtement $\widetilde{M}$ de la manière suivante. On découpe M le long des sous-variétés F_1 et F_2. On obtient ainsi la variété à bord W avec

$$\partial W = F_1^+ \cup F_1^- \cup F_2^+ \cup F_2^- .$$

On construit $\widetilde{M}$ en remplaçant chaque sommet s du graphe $\mathcal{G}$ ci-dessus avec pour arêtes sortantes e_1^+, e_1^-, e_2^+, e_2^- par une copie de W et en recollant les F_i^+ avec les F_i^- se trouvant sur une même arête. Soit $\widetilde{x}_0$ le point de $\widetilde{M}$ au-dessus de x_0 qui appartient à la copie de W identifiée au sommet s_0 du graphe $\mathcal{G}$. L'application f se relève en une application $\widetilde{f}$ continue de $\widetilde{M}$ dans le graphe $\mathcal{G}$ qui induit un morphisme surjectif $p_3 \colon \pi_1(\widetilde{M}, \widetilde{x}_0) \to G$.

L'isométrie φ (donnée par le point 5) du lemme 4) envoie le point x_0 de M sur un point n'appartenant pas à la réunion de F_1 et de F_2 et permute F_1 et F_2 ; elle induit donc un isomorphisme de $\pi_1(M,x_0)$ qui laisse stable le sous-groupe $p_2^{-1}(G)$. L'isométrie φ se relève donc en une isométrie $\widetilde{\varphi}$ de $\widetilde{M}$.

La préimage de F_1 (resp. F_2) est la réunion disjointe de $2n_2 - 1$ copies isométriques de F_1 (resp. F_2). La préimage de γ_1 (resp. γ_2) a n_2 composantes connexes: $n_2 - 1$ d'entre elles sont isométriques à γ_1 (resp. γ_2) et l'autre est un revêtement de degré n_2 de γ_1 (resp. γ_2) que l'on note $\widetilde{\gamma}_1$ (resp. $\widetilde{\gamma}_2$). Le lacet $\widetilde{\gamma}_1$ (resp. $\widetilde{\gamma}_2$) rencontre n_2 relevés de F_1 (resp. F_2): $F_1^1, \dots, F_1^{n_2}$ (resp. $F_2^1, \dots, F_2^{n_2}$); on en choisit un que l'on note $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) de manière à ce que $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ soient permutées par $\widetilde{\varphi}$ et $\mathrm{d}(\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2) > c_1 n_2$ où c_1 est une constante indépendante de n_2.

Pour $i = 1, 2$ soit C_i l'ensemble des géodésiques fermées de $\widetilde{M}$ rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul et de longueur minimale que l'on note l_i. Puisque $\widetilde{\varphi}$ est une isométrie de $\widetilde{M}$ qui permute les $\widetilde{F}_i$, on a $l_1 = l_2$; on note cette valeur commune L.

FAIT 1. *Tout élément de C_i est une réunion de segments géodésiques joignant les F_i^j pour $j = 1, \dots, n_2$. En particulier, $L > c_2 n_2$ où c_2 est une constante indépendante de n_2.*

En effet, soit $\gamma \in C_i$. Soit $g \in \pi_1(M, \widetilde{x}_0)$ un représentant de γ. Puisque γ rencontre $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul, la somme des puissances de a^{n_2} (resp. b^{n_2}) si $i = 1$ (resp. si $i = 2$) dans l'écriture réduite de $p_3(g) \in G$ (sur les générateurs donnés dans la définition de G) est non nulle. Alors, γ rencontre tous les F_i^j pour $j = 1, \dots, n_2$ avec un degré d'intersection homologique non nul, et le fait 1 en découle.

FAIT 2. *Pour n_2 suffisamment grand, tout élément de C_1 (resp. C_2) est disjoint de $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$).*

En effet, soit γ un élément de C_1 (resp. C_2) qui rencontre $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$). Le lacet γ contient un sous-chemin géodésique disjoint de $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) partant d'un point de $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ et y revenant après avoir rencontré $\widetilde{F}_2$ (resp. $\widetilde{F}_1$). Un tel chemin est de longueur $> \frac{c_1}{2} n_2$. Or le diamètre de $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ est égal à δ. Donc, si $n_2 > \frac{2\delta}{c_1}$, on peut tronquer γ et obtenir un lacet de longueur plus petit que L et rencontrant $\widetilde{F}_1$ (resp. $\widetilde{F}_2$) avec un nombre d'intersection homologique non nul; ce qui est absurde par définition de L.

FAIT 3. *Pour n_2 suffisamment grand, tout élément de $\mathcal{C}_i$ pour $i = 1,2$, rencontre $\widetilde{F}_i$ en un unique point.*

En effet, soit γ un élément de $\mathcal{C}_i$ qui rencontre deux fois $\widetilde{F}_i$. Soit δ_i le diamètre de $\widetilde{F}_i$. Si $n_2 > \frac{\delta_i}{c_2}$, on peut tronquer γ et obtenir un lacet de longueur plus petite que L et rencontrant $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul; ce qui est absurde par définition de L.

Dans la suite on suppose que n_2 est choisi suffisamment grand de manière à ce que les conclusions des faits 2 et 3 soient vérifiées et $L > 2d$. Les deux premiers points du lemme 5 sont donc démontrés.

FAIT 4. *Tout lacet γ représenté dans $\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0)$ par un élément du noyau de p_3 est d-réductible.*

En effet un tel lacet γ est homotope à un lacet de W ; le fait 4 résulte donc de la définition de d.

Montrons le point 3). Montrons d'abord que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Les $n_2 - 1$ préimages isométriques (de longueur $\leq d$) de γ_1 (resp. γ_2) sont représentées par des éléments de $\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0)$ dont les images par p_3 sont les b^jab^{-j} (resp. a^jba^{-j}) pour $j = 1,\dots,n_2 - 1$. Donc d'après le fait 4, l'ensemble des géodésiques d-réductibles est représenté dans $\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0)$ par le sous-groupe $p_3^{-1}(H)$ où H est un sous-groupe normal de G contenant les b^jab^{-j} et les a^jba^{-j} pour $j = 1,\dots n_2-1$. Soit γ un élément de $\mathcal{C}$. Soit $g \in G$ l'image par p_3 d'un représentant de γ dans $\pi_1(\widetilde{M},\widetilde{x}_0)$. Alors, $g \notin H$ et, dans l'écriture réduite de g sur les générateurs de G, la somme des puissances des a^{n_2} ou des b^{n_2} est non nulle. Donc γ intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ avec un nombre d'intersection homologique non nul. Comme γ est de longueur L, elle appartient à $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}$ i.e. que les éléments de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ ne sont pas d-réductibles. Soit $\gamma \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Supposons que γ soit une géodésique d-réductible. Alors γ s'écrit comme un produit libre de lacets librement homotopes à des géodésiques de longueur plus petite que d. Mais γ intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ en un unique point, donc une des géodésiques de longueur d intersecte $\widetilde{F}_1$ ou $\widetilde{F}_2$ avec un degré d'intersection homologique non nul, ce qui est impossible par minimalité de L. Le point 3) du lemme 5 est donc démontré.

Enfin le point 4) se déduit simplement du fait que tout élément de $\mathcal{C}$ passe par un point de l'ensemble $\widetilde{f}^{-1}(s_0)$ qui est de diamètre δ. □

THÉORÈME 3. *Soit M_0 une variété hyperbolique compacte. On suppose que M_0 contient un cycle géodésique de codimension un. Alors M_0 admet deux revêtements finis isospectraux mais non isométriques.*

Démonstration. Pour construire ces deux revêtements isospectraux on va utiliser la méthode de Sunada (pour un survol introductif de l'isospectralité et en particulier de la méthode de Sunada cf. [Br1]). D'après les lemmes 4 et 5, il existe un revêtement fini $\widetilde{M}$ de M_0 comme dans le lemme 5 (dans la suite on adopte les notations du lemme 5 et on suppose choisi $L > 2\delta$).

On considère les graphes

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{X}/H_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{X}/H_2$$

où $\mathcal{X}$ est le graphe de Cayley de $\mathrm{SL}(3,2)$ pour les générateurs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

H_1 est le sous-groupe de $\mathrm{SL}(3,2)$ constitué des matrices $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$, et H_2 le sous-groupe de $\mathrm{SL}(3,2)$ constitué des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

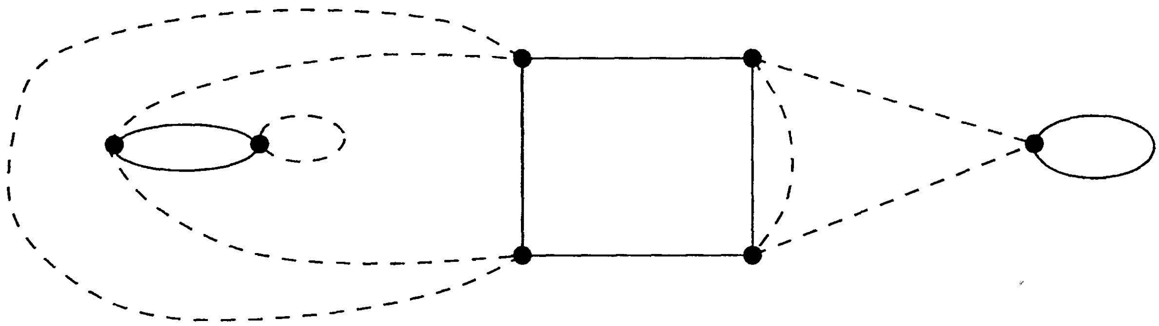

FIGURE 3
Le graphe $\mathcal{G}_1$

On commence par construire un revêtement régulier de $\widetilde{M}$: $\widehat{M}$ de groupe de Galois isomorphe à $\mathrm{SL}(3,2)$. La variété $\widetilde{M}$ contient deux sous-variétés $\widetilde{F}_1$ et $\widetilde{F}_2$ auxquelles on sait associer un morphisme surjectif du groupe fondamental de $\widetilde{M}$ sur le groupe libre de rang deux qui se surjecte sur $\mathrm{SL}(3,2)$. Soit donc p_4 la surjection de $\pi_1(\widetilde{M})$ sur $\mathrm{SL}(3,2)$. On note $\widehat{M}$ le revêtement fini de $\widetilde{M}$ associé au sous-groupe $p_4^{-1}(\{e\})$ de $\pi_1(\widetilde{M})$. Le revêtement $\widehat{M}$ peut

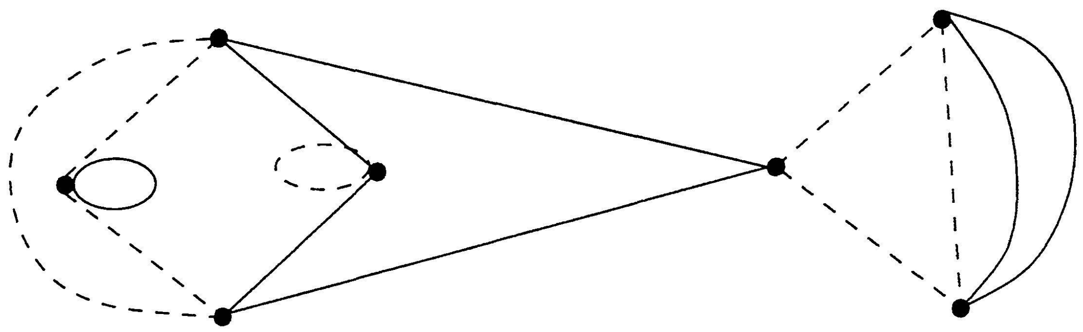

FIGURE 4
Le graphe $\mathcal{G}_2$

aussi s'obtenir de la même manière que dans la démonstration du lemme 5 en recollant la variété $\overline{\widetilde{M}-(\widetilde{F}_1\cup\widetilde{F}_2)}$ suivant le graphe $\mathcal{X}$. La variété $\widehat{M}$ ainsi obtenue admet une action de SL(3,2) par isométries de la même manière que SL(3,2) agit sur $\mathcal{X}$. Maintenant, soient $\widetilde{M}_1=\widehat{M}/H_1$ et $\widetilde{M}_2=\widehat{M}/H_2$. Puisque l'action de SL(3,2) sur $\widehat{M}$ est compatible avec son action sur $\mathcal{X}$, les variétés $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ peuvent aussi être obtenues en recollant des copies de $\overline{\widetilde{M}-(\widetilde{F}_1\cup\widetilde{F}_2)}$ suivant les graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. On applique alors le théorème suivant.

THÉORÈME (Sunada [Sun]). *Soit G un groupe fini qui agit librement sur une variété riemannienne compacte $\widehat{M}$ par isométries. Soient $H_1, H_2 < G$ deux sous-groupes vérifiant*

$$|[g]\cap H_1| = |[g]\cap H_2|$$

pour tout $g\in G$ (où $[g]$ désigne la classe de conjugaison de g dans G). Alors les deux quotients $M_1=\widehat{M}/H_1$ et $M_2=\widehat{M}/H_2$ sont isospectraux.

Il est classique (cf. [Br1]) que les groupes $H_1, H_2 < G = \mathrm{SL}(3,2)$ vérifient la condition du théorème de Sunada. On en déduit que les variétés hyperboliques $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ construites ci-dessus sont isospectrales.

Pour conclure il nous reste à montrer que les variétés $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ ne sont pas isométriques. Pour ce faire on compte le nombre maximal d_i de géodésiques simples de longueurs L qui ne sont pas d-réductibles et qui sont deux à deux à distance $\leq 2L+2\delta$ dans $\widetilde{M}_i$.

Chaque élément γ de $\mathcal{C}$ admet 3 relevés dans chaque $\widetilde{M}_i$ pour $i=1,2$ dont un seul lui est isométrique; on le note γ_i. De plus dans $\widetilde{M}_1$ il existe γ_1 et γ_1' des relevés de $\gamma,\gamma'\in\mathcal{C}$ à distance $\geq 3L > 2L+2\delta$ et dans $\widetilde{M}_2$ pour tous $\gamma,\gamma'\in\mathcal{C}$, γ_2 et γ_2' sont à distance $\leq 2L+2\delta$. Nous allons montrer que les géodésiques γ_i pour $\gamma \in \mathcal{C}$ sont les seules géodésiques fermées de longueur L qui ne sont pas d-réductibles dans $\widetilde{M}_i$ $(i = 1, 2)$. En particulier on aura montré que $d_1 \neq d_2$ et donc que $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ ne sont pas isométriques.

Soit λ une géodésique simple fermée de longueur L dans $\widetilde{M}_i$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre un $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique non nul alors elle appartient à $\mathcal{C}$ et la projection de revêtement restreinte à λ est une isométrie. En particulier $\lambda = \gamma_i$ pour un certain $\gamma \in \mathcal{C}$. Si la projection de λ dans $\widetilde{M}$ rencontre chaque $\widetilde{F}_i$ avec un nombre d'intersection homologique nul, alors d'après le lemme 5 elle est d-réductible et il en est de même pour λ. $\square$

De la section précédente on tire immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. *Pour tout n, il existe des variétés hyperboliques isospectrales non isométriques de dimension n (non nécessairement arithmétiques).*

La littérature sur l'isospectralité est vaste (cf. [Br1]), signalons que les premiers exemples de variétés hyperboliques isospectrales ont été obtenus par M.-F. Vignéras [Vig] en dimension deux et trois à l'aide de variétés arithmétiques. Depuis, la méthode de Sunada a permis de construire de nombreux exemples en dimension deux. En grande dimension $(n > 26)$, R. Spatzier a montré [Sp], toujours à l'aide de la méthode de Sunada et à l'aide du théorème de rigidité de Mostow, que toute variété hyperbolique compacte est finiment revêtue par deux variétés hyperboliques isospectrales non isométriques. Enfin en dimension trois, A. Reid [Re] a construit des exemples non arithmétiques de variétés hyperboliques isospectrales non isométriques.

5. PETITES VALEURS PROPRES DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Dans cette section, on s'intéresse au problème de l'existence de petites valeurs propres.

On dira qu'une suite $\{M_m\}$ de variétés hyperboliques *converge uniformément sur tout compact* vers une variété hyperbolique M si pour tout compact K de M, pour m grand, il existe un compact $K_m \subset M_m$ isométrique à K. Signalons que cette définition est plus forte que la notion habituelle de convergence géométrique (cf. [CEG]). On appelle enfin *variété tube de type* (n,k) le quotient $\mathbf{H}^n/\Lambda$ de l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ par un réseau Λ de $\mathrm{Stab}\,(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k$.

THÉORÈME 4. *Soit M une variété hyperbolique de dimension n. Supposons que M contient un cycle géodésique de dimension k. Alors, pour tout réel ε strictement positif, M est finiment revêtue par une variété hyperbolique dont la première valeur propre du laplacien est inférieure à*

$$(k-1)(n-k)+\varepsilon$$

si $2k > n+1$ et à

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2+\varepsilon$$

sinon.

Démonstration.

1. *Construction des revêtements finis.* On écrit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ avec Γ groupe kleinien. Puis, de même que dans la démonstration du théorème 1, quitte à conjuguer Γ, on suppose que $\Lambda = \mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k) \cap \Gamma$ est un réseau dans $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k$. Soit $\{\Gamma_m\}$ la suite de sous-groupes de Γ distingués d'indices finis, fournie par le lemme principal. On a $\Lambda = \bigcap_m \Gamma_m$. La suite de variétés hyperboliques $\{M_m = \mathbf{H}^n/\Gamma_m\}$ converge alors uniformément sur tout compact vers la variété tube $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$. En effet, soit K un compact de T. Soit $\widetilde{K}$ un compact de $\mathbf{H}^n$ se projetant surjectivement sur K. L'action de Γ sur $\mathbf{H}^n$ est propre donc $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma\widetilde{K} \cap \widetilde{K} \neq \varnothing\}$ est fini. Or, $\Lambda = \bigcap_m \Gamma_m$; donc, pour m grand, si $\gamma \in \Gamma_m$ est tel que $\gamma\widetilde{K} \cap \widetilde{K} \neq \varnothing$, alors $\gamma \in \Lambda$. Et la projection de revêtement de T sur M_m se restreint à K en une isométrie.

2. *Étude du laplacien hyperbolique* (cf. [Sul1] pour plus de détails). Soit $\lambda_0(T)$ la borne inférieure du spectre L^2 du laplacien sur T. Dans [Sul1], Sullivan montre que $\lambda_0(T) = (k-1)(n-k)$ si $2k > n+1$ et $\lambda_0(T) = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ sinon.

Esquissons l'idée de la démonstration (de l'inégalité dont on a besoin). Étant donné ξ un point de $\mathbf{S}^{n-1}$, on peut considérer la projection stéréographique du modèle de la boule pour $\mathbf{H}^n$ vers le modèle du demi-espace pour $\mathbf{H}^n$ avec $\xi \leftrightarrow \infty$. Si y est la coordonnée verticale, alors $\Phi(x,\alpha,\xi) = (y(x))^\alpha$ est une fonction $\alpha(n-1-\alpha)$-propre du laplacien sur $\mathbf{H}^n$. (Dans ces coordonnées, $\Delta = y^2(\Delta_{\text{Euclidien}}) - (n-2)y\frac{\partial}{\partial y}$.) La construction de Patterson-Sullivan (cf. [Sul2]) implique l'existence pour $\alpha = \dim L(\Lambda) = k-1$ (car Λ est un réseau de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$) d'une application continue Λ-équivariante

$$\mu\colon \mathbf{H}^n \to M^+(\mathbf{S}^{n-1}_\infty)$$

$$x \mapsto \mu_x$$

telle que $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = \frac{\Phi(x,\alpha,\xi)}{\Phi(y,\alpha,\xi)}$. De plus, μ est concentrée sur l'ensemble limite $L(\Lambda) = \mathbf{S}^{k-1}_\infty (\subset \mathbf{S}^{n-1}_\infty)$ de Λ. La fonction $u(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}_\infty} \Phi(x,\alpha,\xi) d\mu_0(\xi)$ (où $0 \in \mathbf{H}^n$ est tel que $y(0) = 1$) pour $x \in \mathbf{H}^n$ est une fonction $\alpha(n-1-\alpha)$-propre du laplacien sur $\mathbf{H}^n$. Et

$$u(x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}_\infty} \frac{\Phi(x,\alpha,\xi)}{\Phi(0,\alpha,\xi)} d\mu_0(\xi) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}_\infty} d\mu_x(\xi) = \mu_x(\mathbf{S}^{n-1}_\infty).$$

L'application u est donc Λ-invariante et de carré intégrable sur $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$. On paramètre T par $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times [0, +\infty[$. La métrique sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times \{R\}$ est multipliée par $\cosh R$ sur F et par $\sinh R$ sur $\mathbf{S}^{n-(k+1)}$. Donc l'élément de volume est multiplié par un facteur de l'ordre de $e^{(n-1)R}$. La valeur de u, quant à elle, est multipliée par un facteur de l'ordre de $e^{-\alpha R}$. Ainsi, l'intégrale sur $T - F$ est une intégrale double

$$\int_{R=0}^{\infty} \int u^2 d\sigma_R dR = O\Big(\int_0^\infty e^{(-2\alpha+n-1)R} \Big(\int u^2 d\sigma \Big) dR \Big),$$

où $d\sigma$ est l'élément de volume sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)}$ et $d\sigma_R$ l'élément de volume sur $F \times \mathbf{S}^{n-(k+1)} \times \{R\}$. L'intégrale est finie si $2\alpha > n-1$. Donc, si $2k > n+1$, $\lambda_0(T) \leq (k-1)(n-k)$. Enfin, il est connu que dans tous les cas $\lambda_0(T) \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ (cf. Appendice pour plus de détails).

3. *Conclusion.* Soit ε un réel strictement positif. Compte tenu de la caractérisation de Rayleigh (cf. [Ch]), il existe une fonction f de classe C^∞ sur T à support compact K telle que

$$\frac{\int_T \|df\|^2}{\int_T |f|^2} \leq \lambda_0(T) + \varepsilon.$$

Mais la suite (M_m) de variétés hyperboliques converge uniformément sur tout compact vers la variété tube T. Donc, il existe un entier m_0 tel que la variété M_{m_0} contienne un compact K' isométrique à K. On en déduit l'existence d'une fonction f' sur M_{m_0} de classe C^∞ à support inclus dans K' telle que

$$\frac{\int_{M_{m_0}} \|df'\|^2}{\int_{M_{m_0}} |f'|^2} \leq \lambda_0(T) + \varepsilon.$$

L'intégrale de f' sur M_0 n'a pas de raison d'être nulle, mais on peut introduire la fonction

$$g' = f' - \frac{1}{\mathrm{vol}\,(M_{m_0})} \int_T f.$$

Lorsque m_0 est grand $\int_{M_{m_0}} |g'|^2$ est proche de $\int_{M_{m_0}} |f'|^2$ et

$$\int_{M_{m_0}} g' = 0\,.$$

La caractérisation de la première valeur propre du laplacien par les quotients de Rayleigh (cf. [Ch]) permet alors de conclure la preuve du théorème 4. □

L'idée de faire converger des revêtements finis de M vers une variété tube est empruntée à l'article [BLS] où elle est appliquée à l'étude du dual unitaire des $\mathbf{Q}$-groupes semi-simples.

Lorsque $2k > n+1$, le théorème 4 nous dit bien (comme annoncé dans l'introduction) que M a virtuellement des petites valeurs propres.

En Appendice, on détermine explicitement le spectre des variétés tubes.

Lorsque $k = n-1$, d'après le théorème 2, on sait que M a virtuellement un premier nombre de Betti positif donc grâce à la formule de Trace de Selberg [R] ou plus simplement en utilisant les quotients de Rayleigh, on peut montrer que M admet des revêtements avec des valeurs propres aussi petites que l'on veut.

Variétés arithmétiques «non standard». En dimension impaire, on a vu qu'il existe des variétés hyperboliques arithmétiques non standard. On en esquisse la construction (cf. [Vin] et [LM] pour plus de détails).

Soient K un corps de nombres totalement réel, D une algèbre de quaternions sur K muni de l'involution σ donnée par

$$\sigma(x) = tr(x) - x, \qquad x \in D\,.$$

Soit V un espace vectoriel de dimension m sur D et

$$h\colon V \times V \longrightarrow D$$

une forme anti-hermitienne non dégénérée (de telle manière que pour λ, $\mu \in D$ et v, $w \in V$, $h(\lambda v, \mu w) = \sigma(\lambda) h(v,w)\mu$). Soit $G = SU(h)$ le groupe spécial unitaire de la forme h. Supposons que h soit choisi de manière à ce que

$$G(K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n,1) \times C\,,$$

où C est un groupe compact et $n+1 = 2m$. Si $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de K, alors la projection Γ de $G(\mathcal{O})$ sur $\mathrm{SO}(n,1)$ est un réseau arithmétique. Tout sous-groupe de Γ d'indice fini agissant librement sur $\mathbf{H}^n$ donne lieu à une variété hyperbolique; en dimension $n \neq 3, 7$ ce sont les seules variétés hyperboliques arithmétiques non standard. Concluons en montrant que le théorème 4 s'applique à ces variétés. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $m-1$ et h_0 la restriction de la forme h à W. Choisissons W de manière à ce que si $H = SU(h_0)$, alors

$$H(K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n-2,1) \times C,$$

où C est un groupe compact. La projection Λ de $H(\mathcal{O})$ sur $\mathrm{SO}(n-2,1)$ est un réseau. Soit Γ_1 un sous-groupe de Γ d'indice fini agissant librement sur $\mathbf{H}^n$. Notons $\Lambda_1 = \Gamma_1 \cap \Lambda$; Λ_1 agit librement sur $\mathbf{H}^{n-2}$ et on a une immersion canonique de $\mathbf{H}^{n-2}/\Lambda_1$ dans $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$. Donc le théorème 4 s'applique et, pour $n \geq 6$, $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$ a virtuellement des petites valeurs propres. Compte tenu de notre inventaire (cf. section 3) des variétés hyperboliques connues, on en déduit :

FAIT. *Toutes les variétés hyperboliques de dimension $n \geq 6$, $n \neq 7$ de la liste du §3 ont virtuellement des petites valeurs propres.*

Enfin, remarquons que d'après un théorème de R. Brooks [Br2], toute variété riemannienne dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux admet une tour infinie de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée. En particulier, le théorème 2 assure que toute variété hyperbolique compacte qui contient un cycle géodésique de codimension 1 admet une tour de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée.

APPENDICE : SPECTRE DES VARIÉTÉS TUBES

Soient n, k deux entiers positifs, $n > k$. On rappelle qu'une *variété tube de type* (n,k) est le quotient $\mathbf{H}^n/\Lambda$ de l'espace hyperbolique de dimension n par un réseau Λ de $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ agissant librement sur $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$. Dans la suite on se fixe un tel groupe Λ, on note $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$ que l'on suppose compacte et on note $(ds)^2$ sa métrique. Dans cet appendice, on étudie le spectre du laplacien de la variété tube $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$. La métrique sur T est donnée par (cf. [Ch])

$$(dx)^2 = (\cosh r)^2 (ds)^2 + (dr)^2 + (\sinh r)^2 (d\sigma)^2,$$

où $x = (s, r, \sigma)$ avec $s \in F$, $r \in]0, +\infty[$, $\sigma \in \mathbf{S}^{n-(k+1)}$. On écrit

$$(dx)^2 = (\cosh r)^2 \sum_{i,j=1}^{k} g_{ij}(s_1, \ldots, s_k) ds_i ds_j + (dr)^2$$
$$+ (\sinh r)^2 \sum_{i,j=1}^{n-(k+1)} h_{ij}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-(k+1)}) d\theta_i d\theta_j .$$

On note (g^{ij}) (resp. (h^{ij})) l'inverse de la matrice (g_{ij}) (resp. (h_{ij})) et $|g|$ (resp. $|h|$) le module de son déterminant. Alors le laplacien de T s'écrit

$$\Delta . = \frac{-1}{\sqrt{D}} \Big[\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial s_i} \Big(\sum_{j=1}^{k} (\cosh r)^{-2} g^{ij} \sqrt{D} \frac{\partial \,\cdot}{\partial s_j} \Big) + \frac{\partial}{\partial r} \Big(\sqrt{D} \frac{\partial \,\cdot}{\partial r} \Big)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-(k+1)} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \Big(\sum_{j=1}^{n-(k+1)} (\sinh r)^{-2} h^{ij} \sqrt{D} \frac{\partial \,\cdot}{\partial \theta_j} \Big) \Big] ,$$

où $D = (\cosh r)^{2k} |g| (\sinh r)^{2(n-(k+1))} |h|$. Donc, si φ est une fonction de classe C^2 sur T, le laplacien de φ est donné par:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{(\cosh r)^2} \Delta_F \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$
$$- \big(k \tanh r + (n-(k+1)) \coth r \big) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{(\sinh r)^2} \Delta_{\mathbf{S}^{n-(k+1)}} \varphi .$$

Il existe un opérateur auto-adjoint canonique (que l'on note aussi Δ) sur $L^2(T)$ qui étend le laplacien sur les fonctions C^∞ à support compact. Puisque T est complet, toutes les extensions auto-adjointes coïncident et Δ est unique [Ga]. On appelle *fonction de type fini* (λ, μ) une fonction φ sur T définie par $\varphi(x) = f(r) g(s) h(\sigma)$ avec $x = (r, s, \sigma)$, f fonction C^∞ sur $]0, +\infty[$ à support compact, g fonction C^∞ λ-propre sur F et h fonction C^∞ μ-propre sur $\mathbf{S}^{n-(k+1)}$. La restriction de Δ aux fonctions de type fini (λ, μ) s'exprime à l'aide d'un opérateur différentiel du second ordre sur $]0, +\infty[$. On suit [DS] pour obtenir explicitement le spectre de cet opérateur. On en déduira le spectre $\sigma(\Delta)$ de Δ en utilisant la densité des fonctions de type fini et le théorème spectral. Soit $A(r) = (\cosh r)^k (\sinh r)^{n-(k+1)}$.

1. *Étude des fonctions de type fini.* Soient λ et μ deux valeurs propres des opérateurs Δ_F et $\Delta_{\mathbf{S}^{n-(k+1)}}$. On note E_λ et F_μ leurs espaces propres associés. Soient f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, $g \in E_\lambda$, $h \in F_\mu$ et φ la fonction sur T définie par $\varphi(x) = f(r) g(s) h(\sigma)$, avec $x = (r, s, \sigma)$. On a

$$\Delta \varphi(x) = (\square_{\lambda, \mu} f)(r) g(s) h(\sigma) ,$$

où

$$\square_{\lambda,\mu} f = -\frac{1}{A(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A(r)\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right] + \left[\frac{\lambda}{(\cosh r)^2} + \frac{\mu}{(\sinh r)^2}\right] f .$$

De même que pour le laplacien, il existe un unique opérateur auto-adjoint (que l'on note aussi $\square_{\lambda,\mu}$) sur $L^2(0,\infty; A(r)dr)$ qui étend l'opérateur $\square_{\lambda,\mu}$ sur les fonctions C^∞ à support compact. Il est connu (cf. [DS]) que le spectre $\sigma(\square_{\lambda,\mu})$ de $\square_{\lambda,\mu}$ est réunion disjointe du *spectre discret*

$$\sigma_d(\square_{\lambda,\mu}) = \{\nu \mid \square_{\lambda,\mu} - \nu I \text{ n'est pas injective}\}$$

et du *spectre continu*

$$\sigma_c(\square_{\lambda,\mu}) = \{\nu \mid (\square_{\lambda,\mu} - \nu I)^{-1} \text{ existe mais n'est pas continue}\} .$$

Soit $\sigma_e(\square_{\lambda,\mu})$ le *spectre essentiel* de $\square_{\lambda,\mu}$ i.e. l'ensemble des points non-isolés de $\sigma(\square_{\lambda,\mu})$. L'ensemble $\sigma(\square_{\lambda,\mu}) - \sigma_e(\square_{\lambda,\mu})$ est un ensemble fini d'éléments de $\sigma_d(\square_{\lambda,\mu})$. Pour r proche de l'infini, l'équation

$$\square_{\lambda,\mu} f - (\rho^2 - s^2) f = 0 \qquad \left(\text{avec } \rho = \frac{n-1}{2} \text{ et } s \in \mathbf{C}\right) \tag{1}$$

devient

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + (n-1)\frac{d}{dr} - (\rho^2 - s^2)\right) f = 0 .$$

Les solutions de cette équation sont asymptotes à $const \cdot e^{(\rho\pm s)r}$. Donc, d'après [DS; XIII.7.40], $\sigma_e(\square_{\lambda,\mu}) = [\rho^2, +\infty)$. Étudions maintenant le bas du spectre. On cherche une solution explicite à l'équation (1). L'opérateur étant elliptique, on cherche (cf. [Ru]) f dans $L^2(0,\infty; A(r)dr) \cap C^\infty$. On sait (cf. [Ch]) que l'on peut écrire $\mu = l(n-(k+2)+l)$ avec $l \in \mathbf{N}$ et $\lambda = t(k-1-t)$ avec $t \in [0, k-1] \cup (\frac{k-1}{2} + i\mathbf{R}_+)$. On cherche alors une solution à l'équation (1) sous la forme

$$f(r) = \frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t}\varphi(r)$$

avec φ C^∞. On a

$$-\frac{1}{A(r)}\left[\frac{\partial}{\partial r}(A(r)f'(r))\right] =$$

$$-\frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t}\Big[\varphi''(r) + \varphi'(r)\big((n-(k+1)+2l)\coth r - (2t-k)\tanh r\big)$$

$$+ \varphi(r)\Big(\frac{l(n-(k+2)+l)}{\sinh^2 r} - \frac{m(m-(k-1))}{\cosh^2 r} + (l-t)(n-1+l-t)\Big)\Big] .$$

L'équation (1) s'écrit donc (après simplification par $\frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t}$) :

$$(2) \quad \varphi''(r) + \varphi'(r)\big((n-(k+1)+2l)\coth r + (k-2t)\tanh r\big) + \varphi(r)((\rho')^2 - s^2) = 0$$

où $\rho' = \rho + l - t$. Or l'équation (2) possède une solution régulière en 0 qui s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique (cf. [Er]):

$$\varphi_s(r) = (\cosh r)^{r-\rho'}\,{}_2F_1(\tfrac{1}{2}(\rho+l-t-s), \tfrac{1}{2}(\rho-k+l+t+1-s); \tfrac{n-k}{2}+l; \tanh^2 r).$$

Donc une solution régulière en 0 de l'équation (1) est donnée par

$$f_s(r) = (\tanh r)^l (\cosh r)^{s-\rho}\,{}_2F_1(\tfrac{1}{2}(\rho+l-t-s), \tfrac{1}{2}(\rho-k+l+t+1-s); \tfrac{n-k}{2}+l; \tanh^2 r).$$

Et ([Er, p. 104]), pour $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$f_s(r) = c(s)e^{(s-\rho)r}(1 + o(1))$$

quand $r \to +\infty$, avec

$$c(s) = 2^{\rho-s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-k)+l)\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+\rho+l-t))\Gamma(\frac{1}{2}(s+\rho-k+l+t+1))}.$$

Les valeurs propres de l'opérateur $\Box_{\lambda,\mu}$ (dans $L^2(0,\infty; A(r)dr)$) inférieures à ρ^2 sont donc les nombres $\rho^2 - s^2$ où s est un zéro positif de $c(s)$. On obtient donc $\sigma(\Box_{\lambda,\mu}) = \{\rho^2 - s^2 \mid s > 0 \text{ et } c(s) = 0\} \cup [\rho^2, +\infty)$.

2. *Conclusion.* L'espace $L^2(0,\infty; A(r)dr) \otimes (\oplus_\lambda E_\lambda) \otimes (\oplus_\mu F_\mu)$ est dense dans $L^2(T)$ et l'opérateur Δ sur $L^2(T)$ induit sur chaque sous-espace $L^2(0,\infty; A(r)dr) \otimes E_\lambda \otimes F_\mu$ l'opérateur $\Box_{\lambda,\mu} \otimes Id \otimes Id$. Donc, d'après le théorème spectral, on obtient:

THÉORÈME 5. *Soit Λ un réseau cocompact de* $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$ *agissant librement sur $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$. Soit $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$ et $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$. Le spectre L^2 de la variété tube T est la réunion du spectre essentiel $\sigma_e(\Delta) = [\rho^2, +\infty)$ et des petites valeurs propres $\rho^2 - s^2$ où $\rho = \frac{n-1}{2}$ et $s = t - l - \rho - 2p \in]0, \rho]$ avec $p, l \in \mathbf{N}$ et $t(k-1-t)$ dans le spectre de F.*

En particulier, si $k - 1 > \rho$ (i.e. $2k > n+1$), en prenant $t = k-1$, $p = l = 0$ on obtient que $\rho^2 - (k-1-\rho)^2 = (k-1)(n-k)$ est dans le spectre L^2 de T.

RÉFÉRENCES

[AM] ATIYAH, M. F. and I. G. MACDONALD. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley, 1969.

[BLS] BURGER, M., J. S. LI and P. SARNAK. Ramanujan duals and automorphic spectrum. *Bull. Amer. Math. Soc. 26* (1992).

[Bo1] BOREL, A. Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples. *Astérisque 32–33* (1976), 73–112.

[Bo2] —— Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. *Topology 2* (1963), 111–122.

[Br1] BROOKS, R. Constructing isospectral manifolds. *Amer. Math. Monthly 95* (1988), 823–839.

[Br2] —— The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom. 23* (1986), 97–107.

[CEG] CANARY, R., D. EPSTEIN and P. GREEN. Notes on notes of Thurston. In: *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Spaces.* London Math. Soc. Lecture Note Ser. 111, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Ch] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Pure Appl. Math. Vol. 115, Academic Press, New York, 1984.

[CLR] COOPER, D., D. D. LONG and A. W. REID. Essential closed surfaces in bounded 3-manifolds. *J. Amer. Math. Soc. 10* (1997), 553–563.

[DS] DUNFORD, N. and J. T. SCHWARTZ. *Linear Operators (Vol. 2).* Interscience, 1958.

[Er] ERDÉLYI, A. ET AL. *Transcendental Functions (Vol. 1).* McGraw-Hill, 1953.

[Ga] GAFFNEY, M. The harmonic operator for exterior differential forms. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 37* (1951), 48–50.

[GPS] GROMOV, M. and I. PIATETSKI-SHAPIRO. Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces. *Publ. Math. I. H. E. S. 66* (1988), 93–103.

[He] HEMPEL, J. *3-manifolds.* Ann. of Math. Studies, Vol. 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[Li] LI, J. S. Non-vanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients. *J. reine angew. Math. 83* (1991), 653–731.

[LM] LI, J. S. and J. J. MILLSON. On the first Betti number of a hyperbolic manifold with an arithmetic fundamental group. *Duke Math. J. 71* (1993), 365–401.

[Lo] LONG, D. D. Immersions and embeddings of totally geodesic surfaces. *Bull. London Math. Soc. 19* (1987), 481–484.

[Lu1] LUBOTZKY, A. Free quotients and the first Betti number of some hyperbolic manifolds. *Transform. Groups 1* (1996), 71–82.

[Lu2] —— Eigenvalues of the Laplacian, the first Betti number and the congruence subgroup problem. *Ann. of Math. (2) 144* (1996), 441–452.

[Ma] MAL'CEV, A. I. On the faithful representation of infinite groups by matrices. *Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2) 45* (1965), 1–18. [Russian original: *Mat. SS. (N.S.) 8 (50)* (1940), 405–422.]

[Mi] MILLSON, J. J. On the first Betti number of a constant negatively curved manifold. *Ann. of Math. (2) 104* (1976).

[MS] MARGULIS, G. A. and G. A. SOIFER. Maximal subgroups of infinite indices in finitely generated linear groups. *J. Algebra 69* (1981), 1–23.

[R] RANDOL, B. The Selberg Trace Formula. (In [Ch].)

[Rat] RATCLIFFE, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, 1994.

[Re] REID, A. Isospectrality and commensurability of arithmetic hyperbolic 2- and 3-manifolds. *Duke Math. J. 65* (1992), 215–228.

[Ru] RUDIN, W. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[RV] RAGHUNATHAN, M. S. and T. N. VENKATARAMANA. The first Betti number of arithmetic groups and the congruence subgroup problem. *Contemp. Math. 153* (1993), 95–107.

[S] SERRE, J.-P. Arbres, amalgames, SL_2. *Astérisque 46* (1977).

[Sc] SCOTT, P. Subgroups of surface groups are almost geometric. *J. London Math. Soc. (2) 17* (1978), 555–565.

[Se] SELBERG, A. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. In: *Contributions to Function Theory*, edited by K. Chandrasekharan, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1960), 147–164.

[Sp] SPATZIER, R. J. On isospectral locally symmetric spaces and a theorem of von Neumann. *Duke Math. J. 59* (1989), 289–294; Correction. *Duke Math. J. 60* (1990), 561.

[Sul1] SULLIVAN, D. Related aspects of positivity in Riemannian Geometry. *J. Differential Geom. 25* (1987), 327–351.

[Sul2] —— The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Publ. Math. I.H.E.S. 50* (1979), 171–202.

[Sun] SUNADA, T. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. of Math. (2) 121* (1985), 169–186.

[Th] THURSTON, W. P. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds.* Lecture notes, Princeton University, 1979.

[Vig] VIGNÉRAS, M.-F. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. of Math. (2) 112* (1980), 21–32.

[Vin] VINBERG, E. B. *Geometry II.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 29, Springer-Verlag, 1993.

(Reçu le 18 décembre 1998; version révisée reçue le 28 janvier 2000)

Nicolas Bergeron

UMPA ENS-Lyon
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon Cedex 7
France
e-mail: nbergero@umpa.ens-lyon.fr

vide-leer-empty