Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

Autor: Bergeron, Nicolas

Kapitel: 2. Sur la topologie des cycles géodésiques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64797

Appliqué à $H = \{e\}$, le lemme principal redonne le fait (dû à Mal′cev [Ma]) que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ de type fini est résiduellement fini.

2. Sur la topologie des cycles géodésiques

Nous allons appliquer le lemme principal aux cycles géodésiques dans des variétés hyperboliques.

Définitions. *Variétés hyperboliques* (cf. [Th], [CEG] ou [Rat]). Soit $\mathbf{H}^n$ l'*espace hyperbolique*, i.e. l'unique variété riemannienne de dimension n simplement connexe, complète et de courbure constante égale à -1. Une *variété hyperbolique* (de dimension n) M est une variété riemannienne complète de courbure constante égale à -1. Une telle variété est isométrique au quotient $\mathbf{H}^n/\Gamma$ de l'espace hyperbolique par un *groupe kleinien*, *i.e.* un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^n)$. Par commodité, toutes les variétés hyperboliques que nous considérerons seront supposées *orientées*. Alors, $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ où Γ est un groupe kleinien contenu dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, le sous-groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbf{H}^n$. Rappelons que le groupe $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$ s'identifie via le modèle de l'hyperboloïde au sous-groupe $\mathbf{P}\mathrm{SO}(n,1)$ de $\mathrm{O}(n,1)$ (d'indice 4) constitué des matrices de déterminant 1 préservant la nappe supérieure de l'hyperboloïde. Étant donné un groupe kleinien, on notera $L(\Gamma)$ l'*ensemble limite* de Γ, *i.e.* la fermeture, dans la sphère à l'infini $\mathbf{S}_\infty^{n-1}$, de l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de Γ dans $\mathbf{H}^n$.

Théorème 1. *Tout cycle géodésique dans une variété hyperbolique dont le groupe fondamental est de type fini se relève à un revêtement fini en un cycle dont l'image est une sous-variété plongée totalement géodésique.*

Remarque. Le théorème 1 était déjà connu en dimension deux [Sc] et en dimension trois [Lo].

Démonstration. Soit $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$ une variété hyperbolique avec Γ un groupe kleinien de type fini. Soit $i_0 \colon F_0 \to M$ un cycle géodésique de dimension l. Soit $\widetilde{i_0} \colon \widetilde{F_0} \to \mathbf{H}^n$ un relevé de i_0 au revêtement universel $\widetilde{F_0}$ de F_0 (que l'on suppose connexe). Puisque i_0 est une immersion localement totalement géodésique, il en est de même pour $\widetilde{i_0}$. L'application i_0 est propre donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ est complet dans $\mathbf{H}^n$. Donc $\widetilde{i_0}(\widetilde{F_0})$ coïncide avec un sous-espace totalement géodésique de dimension l dans $\mathbf{H}^n$. L'application $\widetilde{i_0}$ est alors un revêtement d'image simplement connexe donc un homéomorphisme sur son image. Et, quitte à conjuguer, on peut identifier le revêtement universel de F_0 avec le sous-espace $\mathbf{H}^l$ de $\mathbf{H}^n$. De plus, i_0 est injective au niveau des groupes fondamentaux; on note $\Lambda_0 = i_{0*}(\pi_1 F_0)$. On a alors

$$\Lambda_0 \subset \Gamma \cap \operatorname{Stab}(\mathbf{H}^l),$$

où $\operatorname{Stab}(\mathbf{H}^l)$, le stabilisateur de $\mathbf{H}^l$ dans $\operatorname{Isom}^+(\mathbf{H}^n)$, est égal à un sous-groupe d'indice fini du produit du groupe $\mathrm{O}(l,1)$ par un groupe de rotations compact que l'on note C. Soit $\Lambda = \Gamma \cap \operatorname{Stab}(\mathbf{H}^l)$. Montrons que la variété $F = \mathbf{H}^l/\Lambda$ (qui est finiment revêtue par F_0) se plonge dans un revêtement fini de la variété $M = \mathbf{H}^n/\Gamma$. Soit i l'immersion canonique de F dans M. Soit D un domaine fondamental (compact) pour l'action de Λ sur $\mathbf{H}^l$. L'action de Γ sur $\mathbf{H}^n$ est propre. Donc l'ensemble

$$E = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma D \cap D \neq \varnothing\}$$

est fini. En particulier $E - \Lambda$ est un sous-ensemble fini de Γ. Mais, d'après le lemme principal (appliqué à $H = \mathrm{O}(l,1) \times C$ et $\Gamma = \Gamma$),

$$\Lambda^* = \Lambda,$$

pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Donc, il existe un sous-groupe $\widehat{\Gamma}$ d'indice fini dans Γ qui contient Λ et tel que $E \cap \widehat{\Gamma} = E \cap \Lambda$. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M et contient F comme sous-variété plongée totalement géodésique. Or le plongement canonique $\widehat{i}$ de F dans $\widehat{M}$ relève i. Donc le cycle donné par i_0 se relève à $\widehat{M}$ en un cycle dont l'image égale à $\widehat{i}(F)$ est plongée. □

REMARQUE. En remplaçant $\operatorname{Stab}(\mathbf{H}^l)$ par $\operatorname{Isom}^+(\mathbf{H}^l) \times C$ dans la démonstration du théorème 1, on peut montrer que sous les hypothèses du théorème 1 on peut relever le cycle en un cycle dont l'image est une sous-variété *orientée.*

THÉORÈME 2. *Tout cycle géodésique de codimension* 1 *dans une variété hyperbolique de volume fini admet deux relevés disjoints à un revêtement fini dont les images sont des sous-variétés plongées totalement géodésiques dont l'union est non séparante.*

Démonstration. Soit M une variété hyperbolique de volume fini de dimension n qui contient un cycle géodésique de dimension $n-1$. Le groupe fondamental de M est de type fini. D'après le théorème 1, on peut donc supposer que M contient une sous-variété orientée plongée totalement géodésique $F = \mathbf{H}^{n-1}/\Lambda$ (i.e. que le cycle est d'image plongée dans M).

Montrons que quitte à passer à un revêtement fini de M, on peut supposer que F est non séparante (i.e. que le cycle se relève en un cycle non homologue à zéro). Supposons que F sépare M en M_+ et M_-. Le théorème de Van Kampen implique que le groupe fondamental Γ de M se décompose en un produit amalgamé

$$\Gamma = A *_\Lambda B,$$

où A (resp. B) est le groupe fondamental de M_+ (resp. M_-). Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux éléments de Γ dont aucune puissance n'appartienne à Λ. Comme dans la démonstration du théorème 1, le lemme principal implique que le sous-groupe Λ est fermé pour la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ. Soit K un sous-groupe de Γ d'indice fini tel que K contienne Λ mais ne contienne ni a ni b. Soit $\widehat{\Gamma}$ l'intersection de tous les conjugués de K dans Γ. Alors, $\widehat{M} = \mathbf{H}^n/\widehat{\Gamma}$ est un revêtement fini de M auquel la variété F se relève en une sous-variété non séparante.

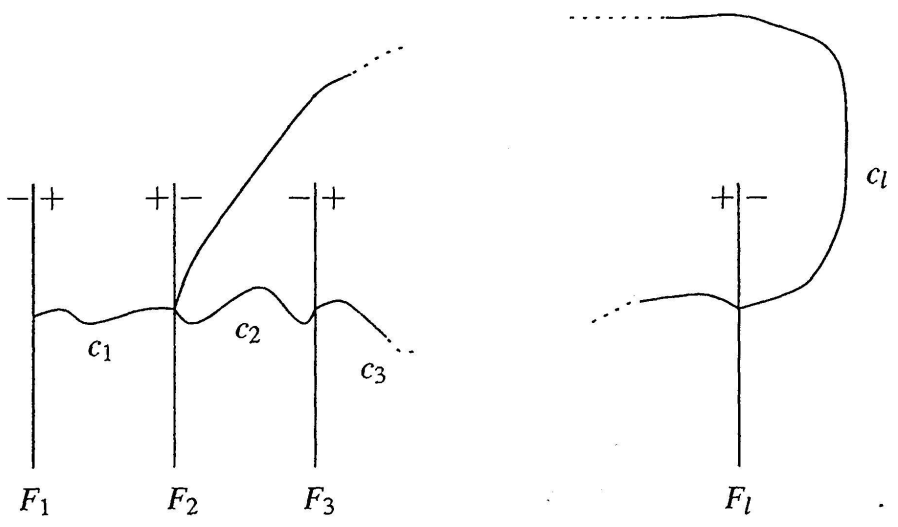

FIGURE 1

F_l est non séparante

En effet, soient α, β deux lacets dans M représentant respectivement a et b et basés en un point $x_0 \in F$. On construit par récurrence une famille finie de relevés de α et β : $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\alpha}_l\}$ (ou $\{c_1 = \widetilde{\alpha}_1, c_2 = \widetilde{\beta}_2, \ldots, c_l = \widetilde{\beta}_l\}$) et l relevés disjoints de F : $F_1, \ldots, F_l$ ($l \in \mathbf{N}$) de manière à ce que c_i joigne F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l joigne F_l à F_{i_0} pour un certain $1 \leq i_0 \leq l$ (le revêtement est fini). Puisque ni α ni β

ne se relève, $i_0 < l$ et le lacet $c_{i_0} . c_{i_0+1} \dots c_l$ a un degré d'intersection congru à 1 modulo 2 avec F_l. Dans la suite on suppose que F est non séparante dans M.

Concluons la démonstration du théorème 2. On a un morphisme canonique p de Γ sur $\mathbf{Z}$ dont le noyau contient Λ, le groupe fondamental de F : $0 \to (\Lambda \subset) \ker(p) \to \Gamma \to \mathbf{Z} \to 0$. Le noyau $\ker(p)$ de p est distingué dans Γ, donc son ensemble limite $L(\ker(p))$ coïncide avec celui de Γ : $\mathbf{S}^{n-1}_\infty = L(\Gamma)$. Mais puisque $\Lambda \subset \operatorname{Stab}(\mathbf{H}^{n-1})$, l'ensemble limite $L(\Lambda)$ de Λ est inclus dans $\mathbf{S}^{n-2}_\infty$, donc $\ker(p)$ contient un élément a de Γ dont aucune puissance n'appartient à Λ. Soit $b \in \Gamma$ tel que $p(b) = 1$; dans la suite on suppose que b peut être représenté par un lacet rencontrant F en un unique point. On applique le lemme principal pour obtenir l'existence d'un sous-groupe $\widetilde{\Gamma}$ de Γ d'indice fini ne contenant pas a. La variété $\widetilde{M} = \mathbf{H}^n/\widetilde{\Gamma}$ est un revêtement fini de M. Et la variété F admet deux relevés disjoints dans $\widetilde{M}$ dont l'union est non séparante. En effet, soient α un lacet dans M représentant a et β un lacet dans M représentant b et rencontrant F en un unique point. Soit c_1 un relevé de α allant d'un relevé F_1 de F à un relevé disjoint F_2 de F. On construit par récurrence des relevés $c_2, \dots, c_l$ de β et des relevés disjoints $F_3, \dots, F_l$ de F $(l \in \mathbf{N})$ de manière à ce que c_i soit un chemin allant de F_i à F_{i+1} pour $i < l$ et c_l un chemin de F_l à F_{i_0} avec $1 \le i_0 \le l$. Le lacet $c_{i_0}.c_{i_0+1} \dots c_l$ a un nombre d'intersection égal à 1 modulo 2 avec F_l et à 0 modulo 2 avec F_1. Donc $F_1 \cup F_l$ est non séparante dans $\widetilde{M}$. □

COROLLAIRE. *Soit M une variété hyperbolique de volume fini contenant un cycle géodésique de codimension 1. Alors le groupe fondamental de M contient un sous-groupe d'indice fini qui se surjecte sur un groupe libre de rang deux.*

Démonstration. Conservons les notations de la démonstration précédente. Alors, $\widetilde{\Gamma} \cong \pi_1 \widetilde{M}$ se surjecte sur un groupe libre de rang deux. En effet, soient $C_1 \cong F_1 \times [-1, 1]$ et $C_l \cong F_l \times [-1, 1]$ deux voisinages colliers de F_1 et F_l dans $\widetilde{M}$. On construit une application continue de $\widetilde{M}$ sur un bouquet de deux cercles en projetant tous les points de $M - (C_1 \cup C_l)$ sur le point base du bouquet et chaque intervalle $x \times [-1, 1]$ sur la première boucle lorsque $x \in F_1$ et sur la deuxième lorsque $x \in F_l$. Au niveau des groupes fondamentaux, cette application induit une surjection de $\widetilde{\Gamma}$ sur le groupe libre de rang deux. En particulier sous les hypothèses du théorème 2, M admet un revêtement fini dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux.