

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 46 (2000)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** PREMIER NOMBRE DE BETTI ET SPECTRE DU LAPLACIEN DE CERTAINES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

**Autor:** Bergeron, Nicolas

**Anhang:** Appendice : Spectre des variétés tubes

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64797>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

hyperboliques arithmétiques non standard. Concluons en montrant que le théorème 4 s'applique à ces variétés. Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $m - 1$  et  $h_0$  la restriction de la forme  $h$  à  $W$ . Choisissons  $W$  de manière à ce que si  $H = SU(h_0)$ , alors

$$H(K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \cong \mathrm{SO}(n - 2, 1) \times C,$$

où  $C$  est un groupe compact. La projection  $\Lambda$  de  $H(\mathcal{O})$  sur  $\mathrm{SO}(n - 2, 1)$  est un réseau. Soit  $\Gamma_1$  un sous-groupe de  $\Gamma$  d'indice fini agissant librement sur  $\mathbf{H}^n$ . Notons  $\Lambda_1 = \Gamma_1 \cap \Lambda$ ;  $\Lambda_1$  agit librement sur  $\mathbf{H}^{n-2}$  et on a une immersion canonique de  $\mathbf{H}^{n-2}/\Lambda_1$  dans  $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$ . Donc le théorème 4 s'applique et, pour  $n \geq 6$ ,  $\mathbf{H}^n/\Gamma_1$  a virtuellement des petites valeurs propres. Compte tenu de notre inventaire (cf. section 3) des variétés hyperboliques connues, on en déduit :

*FAIT. Toutes les variétés hyperboliques de dimension  $n \geq 6$ ,  $n \neq 7$  de la liste du §3 ont virtuellement des petites valeurs propres.*

Enfin, remarquons que d'après un théorème de R. Brooks [Br2], toute variété riemannienne dont le groupe fondamental se surjecte sur un groupe libre de rang deux admet une tour infinie de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée. En particulier, le théorème 2 assure que toute variété hyperbolique compacte qui contient un cycle géodésique de codimension 1 admet une tour de revêtements finis dont la première valeur propre est uniformément minorée.

#### APPENDICE : SPECTRE DES VARIÉTÉS TUBES

Soient  $n, k$  deux entiers positifs,  $n > k$ . On rappelle qu'une *variété tube de type  $(n, k)$*  est le quotient  $\mathbf{H}^n/\Lambda$  de l'espace hyperbolique de dimension  $n$  par un réseau  $\Lambda$  de  $\mathrm{Stab}(\mathbf{H}^k)$  agissant librement sur  $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$ . Dans la suite on se fixe un tel groupe  $\Lambda$ , on note  $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$  que l'on suppose compacte et on note  $(ds)^2$  sa métrique. Dans cet appendice, on étudie le spectre du laplacien de la variété tube  $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$ . La métrique sur  $T$  est donnée par (cf. [Ch])

$$(dx)^2 = (\cosh r)^2(ds)^2 + (dr)^2 + (\sinh r)^2(d\sigma)^2,$$

où  $x = (s, r, \sigma)$  avec  $s \in F$ ,  $r \in ]0, +\infty[$ ,  $\sigma \in \mathbf{S}^{n-(k+1)}$ . On écrit

$$(dx)^2 = (\cosh r)^2 \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(s_1, \dots, s_k) ds_i ds_j + (dr)^2 \\ + (\sinh r)^2 \sum_{i,j=1}^{n-(k+1)} h_{ij}(\theta_1, \dots, \theta_{n-(k+1)}) d\theta_i d\theta_j.$$

On note  $(g^{ij})$  (resp.  $(h^{ij})$ ) l'inverse de la matrice  $(g_{ij})$  (resp.  $(h_{ij})$ ) et  $|g|$  (resp.  $|h|$ ) le module de son déterminant. Alors le laplacien de  $T$  s'écrit

$$\Delta \cdot = \frac{-1}{\sqrt{D}} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \sum_{j=1}^k (\cosh r)^{-2} g^{ij} \sqrt{D} \frac{\partial \cdot}{\partial s_j} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{D} \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-(k+1)} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \sum_{j=1}^{n-(k+1)} (\sinh r)^{-2} h^{ij} \sqrt{D} \frac{\partial \cdot}{\partial \theta_j} \right) \right],$$

où  $D = (\cosh r)^{2k} |g| (\sinh r)^{2(n-(k+1))} |h|$ . Donc, si  $\varphi$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $T$ , le laplacien de  $\varphi$  est donné par :

$$\Delta \varphi = \frac{1}{(\cosh r)^2} \Delta_F \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ - (k \tanh r + (n - (k + 1)) \coth r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{(\sinh r)^2} \Delta_{S^{n-(k+1)}} \varphi.$$

Il existe un opérateur auto-adjoint canonique (que l'on note aussi  $\Delta$ ) sur  $L^2(T)$  qui étend le laplacien sur les fonctions  $C^\infty$  à support compact. Puisque  $T$  est complet, toutes les extensions auto-adjointes coïncident et  $\Delta$  est unique [Ga]. On appelle *fonction de type fini*  $(\lambda, \mu)$  une fonction  $\varphi$  sur  $T$  définie par  $\varphi(x) = f(r)g(s)h(\sigma)$  avec  $x = (r, s, \sigma)$ ,  $f$  fonction  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  à support compact,  $g$  fonction  $C^\infty$   $\lambda$ -propre sur  $F$  et  $h$  fonction  $C^\infty$   $\mu$ -propre sur  $S^{n-(k+1)}$ . La restriction de  $\Delta$  aux fonctions de type fini  $(\lambda, \mu)$  s'exprime à l'aide d'un opérateur différentiel du second ordre sur  $]0, +\infty[$ . On suit [DS] pour obtenir explicitement le spectre de cet opérateur. On en déduira le spectre  $\sigma(\Delta)$  de  $\Delta$  en utilisant la densité des fonctions de type fini et le théorème spectral. Soit  $A(r) = (\cosh r)^k (\sinh r)^{n-(k+1)}$ .

1. *Étude des fonctions de type fini.* Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs propres des opérateurs  $\Delta_F$  et  $\Delta_{S^{n-(k+1)}}$ . On note  $E_\lambda$  et  $F_\mu$  leurs espaces propres associés. Soient  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$ ,  $g \in E_\lambda$ ,  $h \in F_\mu$  et  $\varphi$  la fonction sur  $T$  définie par  $\varphi(x) = f(r)g(s)h(\sigma)$ , avec  $x = (r, s, \sigma)$ . On a

$$\Delta \varphi(x) = (\square_{\lambda, \mu} f)(r)g(s)h(\sigma),$$

où

$$\square_{\lambda,\mu} f = -\frac{1}{A(r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( A(r) \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] + \left[ \frac{\lambda}{(\cosh r)^2} + \frac{\mu}{(\sinh r)^2} \right] f.$$

De même que pour le laplacien, il existe un unique opérateur auto-adjoint (que l'on note aussi  $\square_{\lambda,\mu}$ ) sur  $L^2(0, \infty; A(r)dr)$  qui étend l'opérateur  $\square_{\lambda,\mu}$  sur les fonctions  $C^\infty$  à support compact. Il est connu (cf. [DS]) que le spectre  $\sigma(\square_{\lambda,\mu})$  de  $\square_{\lambda,\mu}$  est réunion disjointe du *spectre discret*

$$\sigma_d(\square_{\lambda,\mu}) = \{ \nu \mid \square_{\lambda,\mu} - \nu I \text{ n'est pas injective} \}$$

et du *spectre continu*

$$\sigma_c(\square_{\lambda,\mu}) = \{ \nu \mid (\square_{\lambda,\mu} - \nu I)^{-1} \text{ existe mais n'est pas continue} \}.$$

Soit  $\sigma_e(\square_{\lambda,\mu})$  le *spectre essentiel* de  $\square_{\lambda,\mu}$  i.e. l'ensemble des points non-isolés de  $\sigma(\square_{\lambda,\mu})$ . L'ensemble  $\sigma(\square_{\lambda,\mu}) - \sigma_e(\square_{\lambda,\mu})$  est un ensemble fini d'éléments de  $\sigma_d(\square_{\lambda,\mu})$ . Pour  $r$  proche de l'infini, l'équation

$$(1) \quad \square_{\lambda,\mu} f - (\rho^2 - s^2)f = 0 \quad (\text{avec } \rho = \frac{n-1}{2} \text{ et } s \in \mathbf{C})$$

devient

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + (n-1) \frac{d}{dr} - (\rho^2 - s^2) \right) f = 0.$$

Les solutions de cette équation sont asymptotes à  $\text{const} \cdot e^{(\rho \pm s)r}$ . Donc, d'après [DS; XIII.7.40],  $\sigma_e(\square_{\lambda,\mu}) = [\rho^2, +\infty)$ . Étudions maintenant le bas du spectre. On cherche une solution explicite à l'équation (1). L'opérateur étant elliptique, on cherche (cf. [Ru])  $f$  dans  $L^2(0, \infty; A(r)dr) \cap C^\infty$ . On sait (cf. [Ch]) que l'on peut écrire  $\mu = l(n - (k+2) + l)$  avec  $l \in \mathbf{N}$  et  $\lambda = t(k-1-t)$  avec  $t \in [0, k-1] \cup (\frac{k-1}{2} + i\mathbf{R}_+)$ . On cherche alors une solution à l'équation (1) sous la forme

$$f(r) = \frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t} \varphi(r)$$

avec  $\varphi \in C^\infty$ . On a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{A(r)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (A(r) f'(r)) \right] = \\ -\frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t} \left[ \varphi''(r) + \varphi'(r) \left( (n - (k+1) + 2l) \coth r - (2t - k) \tanh r \right) \right. \\ \left. + \varphi(r) \left( \frac{l(n - (k+2) + l)}{\sinh^2 r} - \frac{m(m - (k-1))}{\cosh^2 r} + (l-t)(n-1+l-t) \right) \right]. \end{aligned}$$

L'équation (1) s'écrit donc (après simplification par  $\frac{(\sinh r)^l}{(\cosh r)^t}$ ):

$$(2) \quad \varphi''(r) + \varphi'(r)((n - (k + 1) + 2l) \coth r + (k - 2t) \tanh r) + \varphi(r)((\rho')^2 - s^2) = 0$$

où  $\rho' = \rho + l - t$ . Or l'équation (2) possède une solution régulière en 0 qui s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique (cf. [Er]):

$$\varphi_s(r) = (\cosh r)^{r-\rho'} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\rho + l - t - s), \frac{1}{2}(\rho - k + l + t + 1 - s); \frac{n-k}{2} + l; \tanh^2 r\right).$$

Donc une solution régulière en 0 de l'équation (1) est donnée par

$$f_s(r) = (\tanh r)^l (\cosh r)^{s-\rho} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\rho + l - t - s), \frac{1}{2}(\rho - k + l + t + 1 - s); \frac{n-k}{2} + l; \tanh^2 r\right).$$

Et ([Er, p. 104]), pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$ ,

$$f_s(r) = c(s)e^{(s-\rho)r}(1 + o(1))$$

quand  $r \rightarrow +\infty$ , avec

$$c(s) = 2^{\rho-s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-k) + l)\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}(s + \rho + l - t))\Gamma(\frac{1}{2}(s + \rho - k + l + t + 1))}.$$

Les valeurs propres de l'opérateur  $\square_{\lambda,\mu}$  (dans  $L^2(0, \infty; A(r)dr)$ ) inférieures à  $\rho^2$  sont donc les nombres  $\rho^2 - s^2$  où  $s$  est un zéro positif de  $c(s)$ . On obtient donc  $\sigma(\square_{\lambda,\mu}) = \{\rho^2 - s^2 \mid s > 0 \text{ et } c(s) = 0\} \cup [\rho^2, +\infty)$ .

2. *Conclusion.* L'espace  $L^2(0, \infty; A(r)dr) \otimes (\oplus_{\lambda} E_{\lambda}) \otimes (\oplus_{\mu} F_{\mu})$  est dense dans  $L^2(T)$  et l'opérateur  $\Delta$  sur  $L^2(T)$  induit sur chaque sous-espace  $L^2(0, \infty; A(r)dr) \otimes E_{\lambda} \otimes F_{\mu}$  l'opérateur  $\square_{\lambda,\mu} \otimes Id \otimes Id$ . Donc, d'après le théorème spectral, on obtient:

**THÉORÈME 5.** *Soit  $\Lambda$  un réseau cocompact de  $\operatorname{Stab}(\mathbf{H}^k)$  agissant librement sur  $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$ . Soit  $F = \mathbf{H}^k/\Lambda$  et  $T = \mathbf{H}^n/\Lambda$ . Le spectre  $L^2$  de la variété tube  $T$  est la réunion du spectre essentiel  $\sigma_e(\Delta) = [\rho^2, +\infty)$  et des petites valeurs propres  $\rho^2 - s^2$  où  $\rho = \frac{n-1}{2}$  et  $s = t - l - \rho - 2p \in ]0, \rho]$  avec  $p, l \in \mathbf{N}$  et  $t(k-1-t)$  dans le spectre de  $F$ .*

En particulier, si  $k-1 > \rho$  (i.e.  $2k > n+1$ ), en prenant  $t = k-1$ ,  $p = l = 0$  on obtient que  $\rho^2 - (k-1-\rho)^2 = (k-1)(n-k)$  est dans le spectre  $L^2$  de  $T$ .