L'Enseignement Mathématique, t. 46 (2000), p. 139–161

TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

par Alexandre GABARD

RÉSUMÉ. On étudie la topologie des courbes algébriques réelles selon le *point de vue de Klein*, i.e. on s'intéresse au plongement de la partie réelle d'une courbe réelle dans sa complexifiée. Le résultat principal est une caractérisation des plongements possibles pour les courbes *planes*, obtenue en montrant qu'une restriction due à Rohlin est essentiellement la seule. Ce résultat répond à une question posée par Klein, puis par Gross et Harris.

1. INTRODUCTION

Une courbe algébrique projective complexe $C \subset \mathbf{P}^n$ lisse et irréductible est (pour la topologie transcendante) une surface connexe compacte orientable. Si de plus C est *réelle* (i.e. définie par des équations à coefficients réels) alors la conjugaison complexe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$, par le biais de son action sur $\mathbf{P}^n$ coordonnée par coordonnée, préserve globalement le lieu complexe C, en fixant point par point l'ensemble des points réels que l'on notera $C(\mathbf{R})$.

A la courbe réelle C est donc associée une *surface symétrique* (X, σ), c'est-à-dire une surface connexe compacte orientable X munie d'une involution continue σ qui *renverse l'orientation.*

Felix Klein disposait non seulement de la classification topologique des surfaces symétriques, mais savait aussi qu'elles sont toutes réalisables comme l'action de Galois sur une courbe algébrique réelle. Cela étant, Klein se demandait ce qu'il advient si l'on se restreint aux *courbes planes* (cf. [K3], p. 155, note en bas de page) ; de façon précise :

PROBLÈME DE KLEIN. *Caractériser les surfaces symétriques qui admettent un modèle comme l'action de Galois sur une courbe réelle lisse du plan.*