Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 46 (2000)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TOPOLOGIE DES COURBES ALGÉBRIQUES RÉELLES : UNE QUESTION DE FELIX KLEIN

Autor: Gabard, Alexandre

Kapitel: 7.2 Les courbes de degré impair

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64798

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Visualisons les invariants ainsi réalisés sur le diagramme des involutions (cf. Figure 16). On observe que pour $d = 8$, les lissifications atténuées et maximales effectuent une «jonction» (cf. Figure 16), qui ne fera que s'accroître pour les degrés supérieurs. Ce qui garantit que l'on a mis la main sur presque tous les invariants Rohlin-admissibles pour les courbes séparantes.

Étape 5. On note cependant que pour $d = 6$, il nous manque encore la courbe d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$ qui échappe à cette méthode. Il n'est cependant pas difficile d'imaginer une petite construction «ad hoc» qui colmate cette lacune éphémère. On considére à cet effet la configuration de 3 coniques transverses de la Figure 17, dont la déformation proposée fournit la courbe C_6 manquante d'invariants $(d, r, a) = (6, 7, 0)$. (Noter que c'est l'unique endroit dans tout l'argument où il est nécessaire de connaître explicitement une orientation complexe).

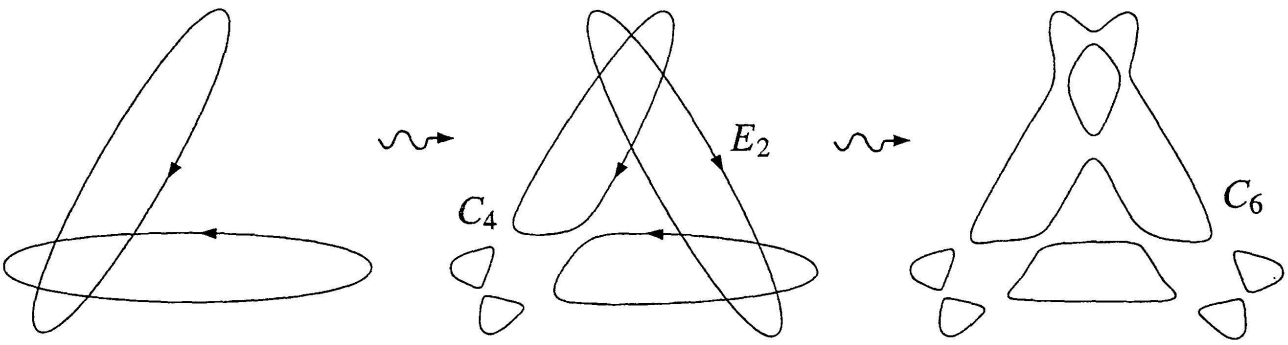

FIGURE 17

En résumé nous avons démontré:

THÉORÈME 7.1. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré pair, la restriction de Rohlin est la seule sur les invariants* (d, r, a).

7.2 LES COURBES DE DEGRÉ IMPAIR

Il nous reste à traiter le cas des courbes de degré impair; les valeurs admissibles des invariants (d, r, a) sont alors résumées par la Figure 18.

A nouveau on utilise la méthode de Hilbert, qui pour les degrés impairs démarre avec C_1 une droite réelle et E_2 une conique réelle rencontrant C_1 en deux points réels. La déformation de $C_1 \cdot E_2 = 0$ de la Figure 19 fournit une M-courbe C_3 de degré 3.

Ensuite on construit une M-courbe C_5 de degré 5 en faisant vibrer une des composantes de C_3, ce qui fournit une nouvelle cubique C_3 oscillant

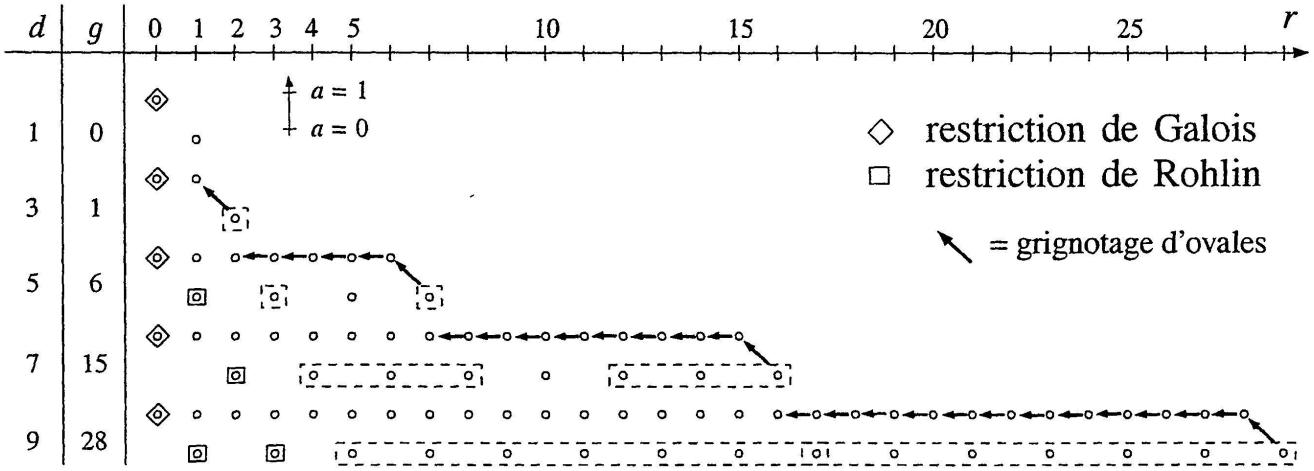

FIGURE 18

relativement à la conique génératrice E_2 (cf. Figure 19). La simplification dessinée des points doubles de $C_3 \cdot E_2 = 0$ fournit la M-courbe C_5 cherchée.

Ensuite la même technique de grignotage des ovales nouveau-nés dans une M-courbe de Hilbert, fournit des courbes non-séparantes avec un invariant r décroissant successivement d'une unité jusqu'à atteindre la borne de Harnack relative au degré impair précédent, i.e. $M(d-2)$. Les invariants (d, r, a) ainsi réalisés sont schématisés par des flèches sur la Figure 18. Ensuite en complétant la famille des courbes ainsi obtenues avec les *courbes de Fermat* de degré impair $F_d : x^d + y^d = 1$ qui ont $r = 1$ et qui sont non-séparantes pour $d \geq 3$ (d'après l'inégalité de Rohlin par exemple), on met à nouveau la main sur un système de courbes permettant d'engendrer toutes les non-séparantes via l'opération de collage d'une petite conique. Ainsi la restriction de Galois est la seule pour les courbes non-séparantes de degré impair.

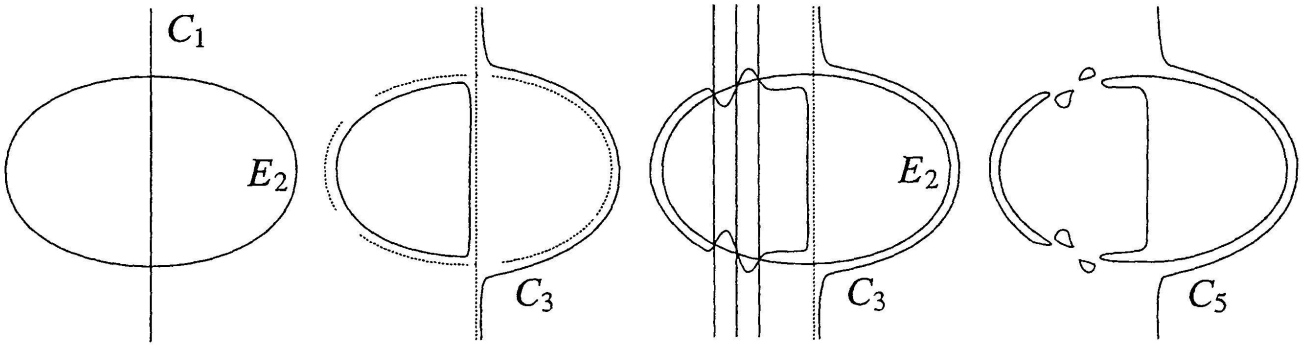

FIGURE 19

Pour les séparantes, la même méthode qu'avant fournit les invariants délimités par la ligne en tirets sur le diagramme des involutions (cf. Figure 18). On observe cette fois que l'on manque deux invariants Rohlin-admissibles,

à savoir $(d,r,a) = (5,5,0)$ et $(d,r,a) = (7,10,0)$: le premier s'obtient en rajoutant une droite à une courbe d'invariants $(d,r,a) = (4,4,0)$, puis en simplifiant de façon compatible avec les orientations complexes (cf. Figure 20).

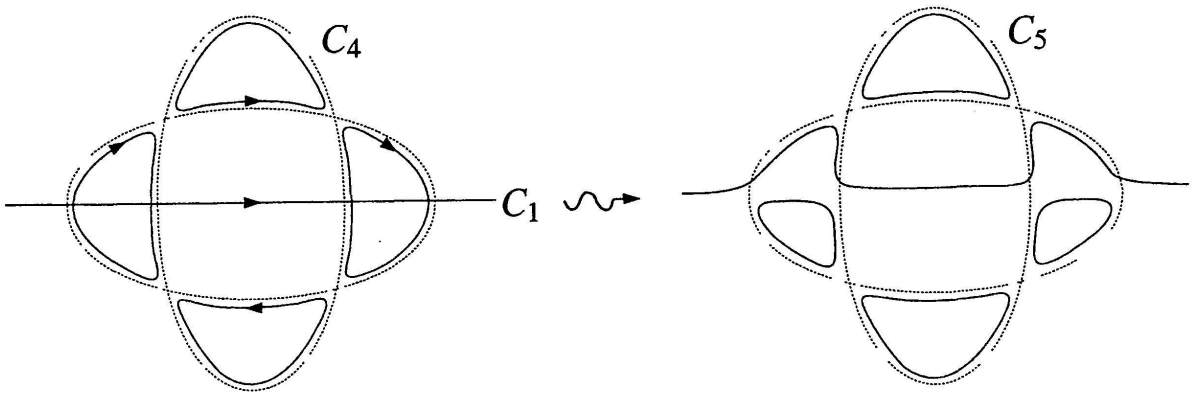

FIGURE 20

Le second s'obtient de la même manière à partir de la courbe de la Figure 15 d'invariants $(d,r,a) = (6,9,0)$ (cf. Figure 21).

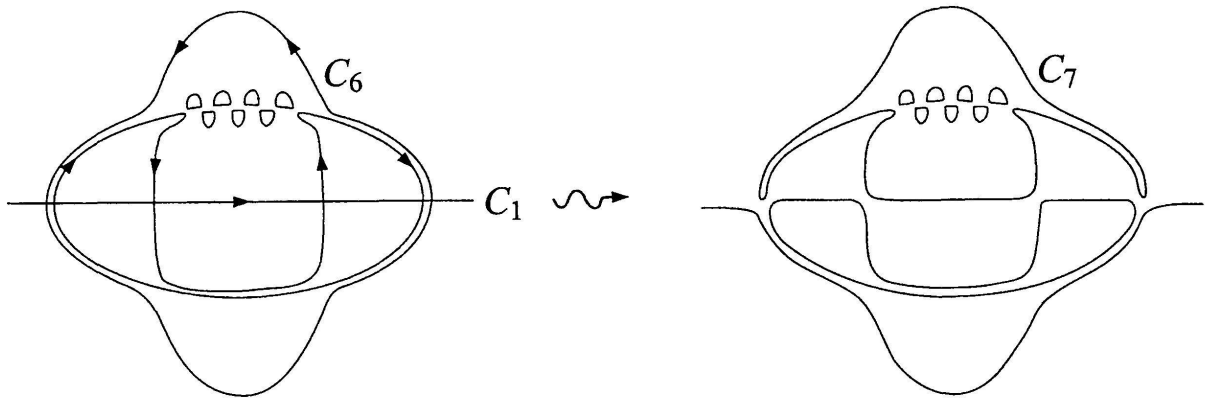

FIGURE 21

En résumé nous avons démontré :

THÉORÈME 7.2. *Pour les courbes planes réelles lisses de degré impair, les restrictions de Galois et de Rohlin sont les seules sur les invariants* (d,r,a).

Cela résout donc complètement le problème de Klein de la caractérisation des surfaces symétriques réalisables comme courbes réelles lisses dans le *plan*.