

## 3.2 Radon inversion by convolution

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{aligned} \int_N u(n \cdot x_o) dn &= 2^{p-2+(q/2)} \omega_p \omega_q \int_0^\infty \int_0^\infty u(\exp(rH) \cdot x_o) x^{(p/2)-1} y^{(q/2)-1} dx dy \\ &= \int_0^\infty u(\exp(rH) \cdot x_o) f(r) dr. \end{aligned}$$

The latter expression follows from the change of variables  $(x, r) \mapsto (x, y)$ , with Jacobian  $\sinh 2r$ ; here

$$f(r) = 2^{p-2+(q/2)} \omega_p \omega_q \sinh 2r \int_0^{\cosh r-1} x^{(p/2)-1} (\cosh^2 r - (1+x)^2)^{(q/2)-1} dx.$$

Setting  $x = t(\cosh r - 1)$  we find

$$\begin{aligned} f(r) &= 2^{(3p+q)/2} \omega_{n-1} (\sinh r)^{q-1} \left(\sinh \frac{r}{2}\right)^p \cosh r \\ &\quad \times \frac{\Gamma((p+q)/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma(q/2)} \int_0^1 t^{(p/2)-1} (1-t)^{(q/2)-1} \left(1 + t \tanh^2 \frac{r}{2}\right)^{(q/2)-1} dt \\ &= 2^{(3p+q)/2} \omega_{n-1} (\sinh r)^{q-1} \left(\sinh \frac{r}{2}\right)^p \cosh r \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, 1 - \frac{q}{2}; \frac{p+q}{2}; -\tanh^2 \frac{r}{2}\right), \end{aligned}$$

by Euler's integral formula for the hypergeometric function. From a quadratic transformation formula for  ${}_2F_1$  ([3], p. 113, formula (35)) we finally obtain

$$f(r) = 2^{(n-1)/2} \omega_{n-1} (\sinh r)^{n-2} (\cosh r)^q {}_2F_1\left(\frac{\rho-1}{2}, \frac{\rho}{2}; \frac{n-1}{2}; -\sinh^2 r\right).$$

Thus, for  $K$ -invariant  $u$ ,

$$\int_N u(n \cdot x_o) dn = \int_0^\infty u(\exp(rH) \cdot x_o) S(r) A(r) dr = \int_X u(x) S(x) dx,$$

where  $A(r) = \omega_n (\sinh r)^{n-1} (\cosh r)^q$  and  $S(r) = f(r)/A(r)$ .  $\square$

### 3.2 RADON INVERSION BY CONVOLUTION

Radon inversion formulas will follow from Section 3.1 if we can solve for  $u$  the convolution equation  $u * S = R^* R u$ , in the form

$$(2) \quad u = DR^* R u.$$

To recover  $u(x)$  from  $Ru$  the recipe will be to integrate  $Ru(y)$  over all  $y$  incident to  $x$ , and to apply the operator  $D$  on the  $x$  variable.

As noted in the proof of Proposition 3,  $R^* R$  commutes with the action of  $G$  on  $X$ , and it is natural to look for a  $D$  with the same property, i.e. a convolution operator: if  $T$  is a distribution on  $X$  such that  $S * T = \delta$ , then

$$u = (R^*Ru) * T.$$

Though the question can be tackled by harmonic analysis on  $X$  (cf. Section 5), a  $G$ -invariant linear differential operator  $D$  can sometimes be found directly, such that  $DS = \delta$ . Then (2) follows from the equality  $u = u * DS = D(u * S)$ . Indeed, for any test function  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \langle D(u * S), \varphi \rangle &= \langle u * S, {}^t D\varphi \rangle \\ &= \langle u(g \cdot x_0), \langle S, ({}^t D\varphi) \circ \tau(g) \rangle \rangle \quad \text{by (1)} \\ &= \langle u(g \cdot x_0), \langle S, {}^t D(\varphi \circ \tau(g)) \rangle \rangle, \end{aligned}$$

since the transpose operator  ${}^t D$  is  $G$ -invariant too, as follows from the existence of a  $G$ -invariant measure on  $X$ . Finally,

$$\begin{aligned} \langle D(u * S), \varphi \rangle &= \langle u(g \cdot x_0), \langle DS, \varphi \circ \tau(g) \rangle \rangle \\ &= \langle u * DS, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

as claimed; assuming  $G$  unimodular (as in [9], p. 291) is thus unnecessary here.

The method applies whenever we can find a  $G$ -invariant differential operator  $D$  on  $X$  with given fundamental solution  $S$ . We shall now investigate this question on the basis of Propositions 4 and 5.

#### 4. RADON TRANSFORMS ON ISOTROPIC SPACES

Throughout this section  $X$  will be an isotropic connected noncompact Riemannian manifold, that is a Euclidean space or a Riemannian globally symmetric space of rank one:

$$X = \mathbf{R}^n \text{ or } H^m(\mathbf{R}), H^{2m}(\mathbf{C}), H^{4m}(\mathbf{H}), H^{16}(\mathbf{O}),$$

where all superscripts denote the real dimension of these real, complex, quaternionic or Cayley hyperbolic spaces (cf. Wolf [18], §8.12). We first try to invert the  $d$ -geodesic Radon transform on  $X$ , defined by integrating over a family of  $d$ -dimensional totally geodesic submanifolds of  $X$ . At the end of this section we shall see that the same tools provide an inversion formula for the horocycle Radon transform on  $H^{2k+1}(\mathbf{R})$ .

##### 4.1 TOTALLY GEODESIC SUBMANIFOLDS

Our first goal is to describe these submanifolds and the corresponding functions  $S$  in Proposition 4.