

## 6.2 Radon inversion by shifts

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Proof.* Immediate, since

$$(R_t^* Ru)(g \cdot x_o) = \int_{K \times H} u(gkth \cdot x_o) dk dh = \int_H u_g(th \cdot x_o) dh. \quad \square$$

Before proceeding we mention the following extension of Proposition 3 to shifted transforms. This result will not be used in the sequel.

PROPOSITION 12. *Let  $G$  and  $H$  be unimodular,  $K$  compact,  $X = G/K$  and  $Y = G/H$ . For any  $u \in C_c(X)$  and  $t \in G$  we have*

$$R_t^* Ru = u * S_t$$

(convolution on  $X$ ). Here  $S_t$  is the  $K$ -invariant distribution on  $X$  defined by  $S = R_t^* R \delta$ , and  $\delta$  is the Dirac distribution at the origin  $x_o = K$  of  $X$ , i.e.

$$\langle S_t, u \rangle = R^* R_t u(x_o) = \int_{K \times H} u(kht^{-1} \cdot x_o) dk dh.$$

*Proof.* The proof of Proposition 3 can be repeated here, with  $R^* R_t$  as the dual of  $R_t^* R$ . The claim can also be checked directly, writing, for  $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ ,

$$\langle R_t^* Ru, \varphi \rangle = \int_{G \times H} u(gth \cdot x_o) \varphi(g \cdot x_o) dg dh,$$

and changing variables into  $h' = h^{-1}$ ,  $g' = gth$ ; the result follows easily,  $G$  and  $H$  being unimodular groups. Details are left to the reader.  $\square$

## 6.2 RADON INVERSION BY SHIFTS

The elementary Lemma 11 can be used in the following way. Assume the transform  $R$  can be inverted at the origin for  $K$ -invariant functions on  $X$ , say

$$(13) \quad u(x_o) = \langle T_{(y)}, Ru(y) \rangle,$$

where  $T$  is some linear form on a space of functions on  $Y$ . Then, replacing  $u$  by the  $K$ -invariant function  $u_g$  in the lemma, we obtain

$$u(g \cdot x_o) = u_g(x_o) = \langle T, Ru_g \rangle.$$

The roles of  $g$  and  $t$  can now be interchanged by Lemma 11, whence

$$(14) \quad u(x) = \langle T_{(t)}, R_t^* Ru(x) \rangle,$$

for arbitrary  $u \in \mathcal{D}(X)$  and  $x \in X$ . The notation  $T_{(t)}$  means that  $T$  now acts on the shift variable  $t$ , or  $t \cdot y_o$  to be precise. Since  $R_{kth}^* Ru(x) = R_t^* Ru(x)$  for  $k \in K$  and  $h \in H$ , this variable may actually be taken in  $K \backslash G/H$ .

The general inversion formula (14) for  $R$  thus follows from the special case (13) of  $K$ -invariant functions at the origin, thanks to the shifted dual transform.

If  $X$  is an isotropic space, the above trick (replace  $u$  by  $u_g$ ) simply means replacing  $u(x)$  by its mean value over the sphere with center  $g \cdot x_o$  and radius  $d(x_o, x)$ .

### 6.3 EXAMPLES

**a. HOROCYCLE TRANSFORM.** We first consider the horocycle Radon transform on  $X = G/K$ , a Riemannian symmetric space of the noncompact type. Using the classical semisimple notations related to an Iwasawa decomposition  $G = KAN$  (see Notations, **d**), we take the point  $x_o = K$ , resp. the horocycle  $y_o = N \cdot x_o$ , as the origin in  $X$ , resp. in  $Y = G/MN$ . Then

$$Ru(g \cdot y_o) = \int_N u(gn \cdot x_o) dn$$

(integrating over  $M$  is unnecessary here) and the dual transform shifted by  $a \in A$  is

$$R_a^* v(g \cdot x_o) = \int_K v(gka \cdot y_o) dk.$$

For  $K$ -invariant  $u$  the decomposition  $g = kan$  gives

$$Ru(g \cdot y_o) = Ru(a \cdot y_o) = \int_N u(an \cdot x_o) dn = a^{-\rho} Au(a);$$

the Abel transform  $\mathcal{A}$  is defined by this equality.

For  $K$ -invariant  $u \in \mathcal{D}(X)$  we have  $Au \in \mathcal{D}(A)$ . Let  $\mathfrak{a}^*$  be the dual space of  $\mathfrak{a}$ . It is known from spherical harmonic analysis on  $X$  that the classical Fourier transform

$$\widehat{Au}(\lambda) = \int_A a^{-i\lambda} Au(a) da, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*,$$

coincides with the spherical transform of  $u$ , with the inversion formula ([9] p.454)

$$(15) \quad u(x_o) = C \int_{\mathfrak{a}^*} \widehat{Au}(\lambda) |c(\lambda)|^{-2} d\lambda,$$

where  $C$  is a positive constant and  $c(\lambda)$  is Harish-Chandra's function. Since