0. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 47 (2001), p. 253–267

SUR L'HYPERBOLICITÉ DE CERTAINS COMPLÉMENTAIRES

par François BERTELOOT et Julien DUVAL

RÉSUMÉ. Nous donnons, dans l'esprit de l'argument de Ros pour le théorème de Picard, une preuve nouvelle et directe de l'hyperbolicité de deux complémentaires d'hypersurfaces de l'espace projectif: celui de $2k+1$ hyperplans en position générale dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, ainsi que celui d'une courbe à 3 composantes, générique, de degré au moins 5 dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

0. INTRODUCTION

Une partie de l'espace projectif $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière non constante, i.e. d'image holomorphe non constante de $\mathbf{C}$.

L'objet de cet article est de donner une nouvelle démonstration, élémentaire, de l'hyperbolicité de deux exemples classiques de complémentaires d'hypersurfaces projectives:

– dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, le complémentaire de $2k+1$ hyperplans en position générale (Green [8]);

– dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, le complémentaire d'une courbe à trois composantes, générique, de degré ≥ 5 (Grauert [7] pour trois coniques, Dethloff-Schumacher-Wong [5], [6] si aucune des trois composantes n'est une droite).

Ces exemples s'inscrivent dans le cadre de la conjecture de Kobayashi (voir [5] par exemple) pour les complémentaires:

CONJECTURE. *Une hypersurface à p composantes, générique, de degré $\geq 2k+1$ de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ a un complémentaire hyperbolique.*

Notons au passage les progrès récents (voir [11] et [4]) dans le cas bien plus difficile que ceux traités ici du complémentaire d'une courbe irréductible dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Les démonstrations connues de l'hyperbolicité des deux exemples qui nous intéressent reposent sur des techniques de distribution des valeurs (lemme de Borel [2]) ou de métriques de jets à courbure négative (voir [9] comme référence générale).

La démarche directe proposée ici s'inspire de la démonstration de Ros du théorème de Picard. L'ingrédient principal en est le lemme de Zalcman-Brody [12], [3] qui permet d'extraire d'une suite de courbes entières non constantes une sous-suite qui converge après reparamétrage vers une courbe entière non constante.

Voici l'argument de Ros tel qu'il est exposé par Zalcman dans [13]:

Soit f holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ évitant $0, 1$ et ∞. Ses racines n-ièmes $f^{1/n}$ évitent de plus en plus de points sur le cercle unité. Quitte à reparamétrer, elles convergent après extraction vers une fonction entière non constante qui évite maintenant tout le cercle unité. Elle est à valeurs dans le disque unité ou son complémentaire, ce qui contredit le théorème de Liouville. $\square$

Cette démonstration s'adapte bien au résultat de Green. La seule modification consiste à faire jouer le même rôle aux hyperplans omis grâce à un plongement adéquat de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$. L'énoncé se réduit par le même usage de racines n-ièmes et passage à la limite à l'hyperbolicité d'un certain polyèdre dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$. Celle-ci résulte alors du théorème de Liouville.

La démonstration de Ros peut aussi s'interpréter comme une « linéarisation » des courbes entières de $\mathbf{C}^*$:

Soit f holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$. Alors il existe une suite de reparamétrages à la source (r_n) telle que $f \circ r_n$ converge vers e^z.

En effet, on trouve par le lemme de Zalcman-Brody des reparamétrages s_n tels que $f^{1/n} \circ s_n$ converge après extraction vers ϕ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^*$. L'image de ϕ doit rencontrer le cercle unité en une valeur non complètement critique donc, quitte à reparamétrer, on a:

$$\phi(z) = e^{i\theta}(1 + z + O(z^2)).$$

Ainsi $f \circ s_n(z/n)$ équivaut à $e^{in\theta}(1+z/n)^n$ qui tend vers e^z après extraction. $\square$

Cet énoncé de linéarisation se généralise bien aux courbes entières de $(\mathbf{C}^*)^k$. En particulier, toute courbe entière non constante dans $(\mathbf{C}^*)^2$ possède une limite (au sens de limite d'une suite de courbes construites en reparamétrant la courbe initiale) qui est feuille d'un feuilletage linéaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

Le cas du complémentaire d'une courbe C à trois composantes en découle de la manière suivante: notons d'abord que $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ est un revêtement ramifié de $(\mathbf{C}^*)^2$ du fait des trois composantes de C. L'idée est maintenant de remplacer une courbe entière non constante dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \setminus C$ par une de ses limites feuille d'un feuilletage holomorphe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Ce feuilletage s'obtient par ce qui précède comme l'image réciproque par le revêtement ramifié d'un feuilletage linéaire de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On montre ensuite que cette feuille limite doit être algébrique en analysant l'intersection d'une feuille transcendante du feuilletage avec le lieu de ramification du revêtement. Elle est donc tracée sur une courbe rationnelle ne coupant C qu'en deux points. C'est une situation non générique. $\square$

Voici le plan de ce texte: après des préliminaires sur l'hyperbolicité, le second paragraphe traite du théorème de Green tandis que la linéarisation des courbes entières de $(\mathbf{C}^*)^k$ fait l'objet du troisième. Le quatrième paragraphe est consacré au complémentaire des courbes à trois composantes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Enfin un appendice explicite les courbes de Brody dans $(\mathbf{C}^*)^k$, apportant un autre éclairage sur l'énoncé de linéarisation.

1. PRÉLIMINAIRES

Notre référence générale pour l'hyperbolicité est la monographie [9].

DÉFINITION. Soit X une variété complexe. Une partie A de X est *hyperbolique* si elle ne contient pas de courbe entière non constante: il n'existe pas d'application holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ dans X d'image contenue dans A.

Les premiers exemples proviennent du théorème de Liouville:

EXEMPLE. Le complémentaire d'un voisinage d'une hypersurface projective de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ est hyperbolique.