3. Linéarisation des courbes entières dans $(C^*)^k$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Comme l'hyperbolicité est une propriété ouverte et stable par revêtement (cf. § 1), tout se réduit à montrer le

LEMME. *Le polyèdre*

$$X_1 = \{z,\ \ |z_i| = \|z\| \ \textit{pour au moins}\ k+1 \ \textit{coordonnées}\}$$

est hyperbolique.

Démonstration. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$ une courbe entière contenue dans X_1. Elle doit «passer du temps» dans une de ses faces $X_I = \{z,\ |z_i| = \|z\|,\ i \in I\}$ où I est une partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$. Par exemple, on peut supposer $f^{-1}(X_{\{1,\ldots,k+1\}})$ d'intérieur non vide. Autrement dit, si $f = [f_1 : \ldots : f_{2k+1}]$, on aura par prolongement analytique $|f_1| \equiv \cdots \equiv |f_{k+1}|$ sur tout $\mathbf{C}$. Comme l'image de f est contenue dans X_1 et que toute partie de $\{1, \ldots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$ rencontre $\{1, \ldots, k+1\}$, il s'ensuit que $\|f\| \equiv |f_1|$ sur tout $\mathbf{C}$. Donc, pour tout i, $|f_i|/|f_1|$ est bornée par 1 sur $\mathbf{C}$ et f est constante par le théorème de Liouville. $\square$

REMARQUE. La même démonstration s'applique au résultat de Babets [1] sur l'hyperbolicité de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $2k+1$ hypersurfaces en position générale.

3. LINÉARISATION DES COURBES ENTIÈRES DANS $(\mathbf{C}^*)^k$

On décrit dans ce paragraphe les limites les plus simples des courbes entières dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ privé de $k+1$ hyperplans en position générale, donc dans $(\mathbf{C}^*)^k$.

DÉFINITION. Soit f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante. Une *limite* de f est une courbe entière non constante g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ obtenue comme limite (uniforme sur les compacts de $\mathbf{C}$) de $(f \circ r_n)$ où (r_n) est une suite de reparamétrages à la source.

Les propriétés suivantes se vérifient facilement :

a) une limite d'une limite g de f en est encore une pour f ;

b) si une courbe entière évite une hypersurface dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$, ses limites évitent encore cette hypersurface ou y sont contenues.

THÉORÈME. *Soit $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante évitant $k+1$ hyperplans en position générale qu'on choisit commme les hyperplans de coordonnées. Alors f possède une limite exponentielle non constante de la forme :*

$$g(z) = [c\, e^{\alpha z}] := [c_1\, e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_{k+1}\, e^{\alpha_{k+1} z}], \qquad c_i, \alpha_i \text{ dans } \mathbf{C}\,.$$

Démonstration. En voici le schéma : comme plus haut on extrait les racines n-ièmes $f^{1/n}$ de f que l'on reparamètre de sorte que $f^{1/n} \circ r_n$ converge vers ϕ entière non constante. L'idée est maintenant d'exploiter le fait que $(f \circ r_n)$ ne peut être normale car proche de (ϕ^n). On la renormalise près d'une intersection entre l'image de ϕ et le lieu de non-normalité des puissances n-ièmes pour créer la limite exponentielle voulue.

Plus précisément, notons Y ce lieu où la famille $(z \mapsto z^n)$ n'est pas normale. C'est un polyèdre constitué des faces

$$Y_{ij} = \{z, \ \ |z_i| = |z_j| \geq |z_l|, \text{ pour tout } l\}\,.$$

Son complémentaire consiste en $k+1$ polydisques ouverts

$$U_i = \{z, \ \ |z_i| > |z_l|, \ \ l \neq i\}\,.$$

Pour simplifier la discussion, supposons les composantes de ϕ distinctes en module. Remarquons que la courbe entière $\phi(\mathbf{C})$ rencontre Y ; en fait, la préimage $\phi^{-1}(Y)$ sépare $\mathbf{C}$, sinon la courbe serait entièrement contenue dans un des polydisques fermés $\overline{U}_i$ qui sont hyperboliques.

Comme $|\phi_i| \neq |\phi_j|$, on doit avoir $(\phi_i/\phi_j)' \neq 0$ sur $\phi^{-1}(Y_{ij})$ hors de points isolés. Autrement dit, la courbe $\phi(\mathbf{C})$ est transverse à toutes les faces de Y en une intersection générique.

On se place au voisinage Δ d'un tel point générique dans $\phi^{-1}(Y)$, par exemple 0 après translation. Son image $\phi(\Delta)$ est transverse à Y. Il en est de même avant la limite pour $f_n(\Delta)$ où $f_n = f^{1/n} \circ r_n$. On peut donc supposer après translation que $f_n(0)$ est dans Y, par exemple dans le bord du polydisque unité $U = U_{k+1}$ de la carte $(z_{k+1} = 1)$, et que sa puissance n-ième converge vers c, quitte à extraire.

Relevons ϕ et f_n dans cette carte via l'exponentielle en posant $\phi = e^{\psi}$ et $f_n = e^{\psi_n}$ où ψ_n converge vers ψ. Ainsi ψ_n' converge vers ψ', puis $n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))$ vers αz localement uniformément, où $\alpha = \psi'(0)$.

Donc $f \circ r_n(z/n) = (f_n)^n(0) e^{n(\psi_n(z/n) - \psi_n(0))}$ tend vers la limite voulue $g(z) = ce^{\alpha z}$. Celle-ci n'est pas constante : en effet $\phi(0)$ est dans l'une des faces du bord de U par exemple Y_{1k+1}. La transversalité de la courbe $\phi(\mathbf{C})$ à cette face se traduit par $\phi_1'(0) \neq 0$ d'où $\alpha_1 \neq 0$.

Le cas général se discute de manière analogue en groupant les composantes de ϕ identiques en module. Ainsi on ne retiendra par exemple de Y que les faces Y_{ij} pour $|\phi_i| \neq |\phi_j|$. □

REMARQUES.

1) On peut supposer de plus α réel dans la limite exponentielle g. Si ce n'est pas le cas, voici comment construire une limite de g (et donc de f) satisfaisant cette propriété: considérons l'enveloppe convexe des α_i significatifs (ceux correspondant à des coefficients $c_i \neq 0$) dans l'écriture de g; quitte à reparamétrer g, on suppose cette enveloppe contenue dans le demi-plan supérieur avec une arête réelle: par exemple α_i réel pour $i \leq p$ et $Im(\alpha_i) > 0$ pour $i > p$; de $g(z+in) = [e^{i\alpha n} c e^{\alpha z}]$ on extrait une sous-suite convergeant vers $h(z) = [c_1 e^{\alpha_1 z} : \ldots : c_p e^{\alpha_p z} : 0 : \ldots : 0]$ qui convient.

2) Ce théorème contient celui de Green: en effet, soit $f(\mathbf{C})$ une courbe entière non constante dans $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$ omettant $2k+1$ hyperplans en position générale, d'équations $(l_i = 0)$. En considérant $\Phi = [l_1 : \ldots : l_{2k+1}]$ le plongement correspondant dans $\mathbf{P}^{2k}(\mathbf{C})$, la courbe entière $\Phi \circ f$ évite maintenant les hyperplans de coordonnées. Elle possède une limite de la forme suivante, quitte à permuter et prendre des multiples des formes linéaires l_i :

$$g(z) = [e^{\alpha_1 z} : \ldots : e^{\alpha_q z} : 0 : \ldots : 0] \text{ avec } \alpha_i = \alpha_1 \text{ ssi } i \leq p .$$

Par position générale, chacune des formes linéaires l_i est toujours combinaison de $k+1$ autres; il en est donc de même pour les composantes de Φ. Ceci entraine que $p \leq k$: sinon toute composante de g serait proportionnelle à $e^{\alpha_1 z}$ et g serait constante. Mais, d'un autre côté, la première composante de g doit être combinaison des $k+1$ dernières, soit:

$$e^{\alpha_1 z} = \sum_{i \geq k+1} \lambda_i e^{\alpha_i z} .$$

Or on a dans cette égalité $\alpha_i \neq \alpha_1$ puisque $p \leq k$. C'est impossible.

4. COMPLÉMENTAIRE D'UNE COURBE À TROIS COMPOSANTES DANS $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

Nous appliquons ce qui précède à l'étude de l'hyperbolicité du complémentaire de trois courbes dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (comparer avec [5], [6]).