3.2 Fonctions de type positif

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

3. Représentations, cohomologie et fonctions (conditionnellement) de type positif

Les groupes sont supposés localement compacts séparables, les espaces de Hilbert considérés sont séparables et non nuls.

3.1 Représentations irréductibles et factorielles

Pour un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'opérateurs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid TS = ST \ \forall S \in \mathcal{S}\}$ le *commutant* de $\mathcal{S}$.

Soit π une représentation unitaire irréductible du groupe G sur l'espace $\mathcal{H}$. Grâce au lemme de Schur, l'irréductibilité de π signifie que le commutant $\pi(G)'$ de l'ensemble $\pi(G) = \{\pi(g) \mid g \in G\}$ est réduit aux opérateurs scalaires. Comme $\pi(G) \subset \mathcal{N}_\pi$, on a $\mathcal{N}_\pi' \subset \pi(G)'$. Ainsi, le centre $\mathcal{N}_\pi \cap \mathcal{N}_\pi'$ de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ est lui-même réduit aux opérateurs scalaires sur $\mathcal{H}$. Ceci montre qu'une représentation irréductible π est factorielle.

3.2 Fonctions de type positif

On appelle *fonction de type positif* sur le groupe localement compact G une fonction continue φ sur G à valeurs complexes telle que, pour tous $g_1, \dots, g_n \in G$, la matrice $\left(\varphi(g_j^{-1} g_i)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est hermitienne positive : pour tous $g_1, \dots, g_n \in G$ et pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda_j} \varphi(g_j^{-1} g_i) \geq 0 .$$

A propos des fonctions de type positif, voir le paragraphe 32 de [HeRo]. Si φ est une fonction de type positif alors, pour tout $g \in G$, $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$ et $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ où e désigne l'élément neutre du groupe G. On note $E_0(G)$ l'ensemble des fonctions de type positif φ sur G telle que $\varphi(e) \leq 1$. C'est un sous-ensemble convexe et borné de l'espace $\mathrm{L}^\infty(G)$ des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur G.

Sur $\mathrm{L}^\infty(G)$, on considère les deux topologies suivantes : d'une part, la topologie $*$-faible ou topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ donnée par les semi-normes

$$p_f : \mathrm{L}^\infty(G) \longrightarrow \mathbf{R}_+ : \varphi \longmapsto |\langle \varphi, f \rangle|$$

où $f \in \mathrm{L}^1(G)$ et $\langle \varphi, f \rangle = \displaystyle\int_G \varphi(g) f(g) \, dg$; d'autre part, la topologie de la convergence uniforme sur toute partie compacte (ou plus simplement topologie de la convergence compacte) pour laquelle un système fondamental de voisinages de la fonction φ est donné par les ensembles

$$\mathcal{W}(\varphi;\varepsilon,K)=\left\{\psi\in \mathrm{L}^{\infty}(G)\ :\ \sup_{g\in K}|\varphi(g)-\psi(g)|<\varepsilon\right\}$$

où ε est un nombre strictement positif et K une partie compacte du groupe G.

La topologie de la convergence compacte est plus forte que la topologie $*$-faible. En général, ces deux topologies sont différentes. Pour le voir, on considère les fonctions f_n sur le groupe additif $\mathbf{R}$ qui sont linéaires par morceaux, valent zéro sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[\frac{1}{n},+\infty[$. Pour la topologie faible, ces fonctions convergent vers la fonction caractéristique de $]0,+\infty[$ alors qu'elles ne convergent pas uniformément sur les parties compactes.

L'ensemble $E_0(G)$ est fermé pour ces deux topologies, il est compact pour la topologie $*$-faible mais en général pas pour la topologie de la convergence compacte. Pour le voir, on considère le tore $G=S^1$ et pour tout $n\in\mathbf{Z}$, le caractère

$$\chi_n\colon S^1\longrightarrow \mathbf{C}\colon z\longmapsto z^{-n}$$

pour $z=e^{2\pi i t}\in S^1$. Cette suite de fonctions de type positif converge vers la fonction nulle pour la topologie $*$-faible: pour $f\in \mathrm{L}^1(S^1)$, $\langle \chi_n, f\rangle$ coïncide avec le coefficient de Fourier $\widehat{f}(n)$ de f au point n qui tend vers zéro pour n tendant vers l'infini. A l'opposé, aucune sous-suite de (χ_n) ne peut converger uniformément vers zéro car $\sup_{z\in S^1}|\chi_n(z)|=1$.

On note $E(G)$ l'ensemble des *états* de G: il s'agit des fonctions φ de type positif sur G pour lesquelles $\varphi(e)=1$. Raikov a montré que, sur $E(G)$, les deux topologies décrites ci-dessus coïncident (voir [Rai] ou le théorème 13.5.2 de [Dix]). Pour un groupe non-discret, l'ensemble des états n'est en général pas fermé pour la topologie $*$-faible. En effet, les caractères du tore décrits ci-dessus sont des états du groupe S^1 mais leur limite pour la topologie $*$-faible vaut zéro au neutre.

Si $\mathrm{ex}\,E_0(G)$ désigne l'ensemble des points extrémaux du convexe $E_0(G)$, on note $P(G)=(\mathrm{ex}\,E_0(G))\setminus\{0\}$ et on observe que $P(G)\subset E(G)$. Les éléments de $P(G)$ s'appellent les *états purs*. Comme $E_0(G)$ est convexe et compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^{\infty},\mathrm{L}^1)$, le théorème de Krein-Milman nous dit que $E_0(G)$ est l'enveloppe convexe des états purs et de 0. En particulier, $P(G)$ est non vide.

3.3 Construction GNS

Si $\pi\colon G\to\mathcal{U}(\mathcal{H})$ est une représentation unitaire de G et $\xi\in\mathcal{H}$, alors la fonction $\varphi(g)=\langle\pi(g)\xi\mid\xi\rangle$ est une fonction de type positif sur G telle que $\varphi(e)=\|\xi\|^2$. Une telle fonction est dite *associée* à la représentation π. Réciproquement, pour toute fonction φ non-nulle de type positif, il existe un triple $(\mathcal{H}_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi)$ où $\pi_\varphi\colon G\to\mathcal{U}(\mathcal{H}_\varphi)$ est une représentation unitaire de G