

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 47 (2001)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS D'UN THÉORÈME DE VERSHIK ET KARPUSHEV
Kapitel: 4. Preuve du théorème
Autor: Louvet, Nicolas
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-65439>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

note $\bar{\pi}$ la représentation conjuguée de π dans l'espace de Hilbert conjugué $\bar{\mathcal{H}}$ et \bar{b} le 1-cocycle à coefficients dans $\bar{\pi}$ correspondant à b . On peut alors réaliser $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ de la façon suivante: le cocycle b_ψ est donné par $b_\psi(g) = b(g) + \bar{b}(g)$, l'espace \mathcal{H}_ψ est le sous-espace réel fermé de $\mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$ engendré par $b_\psi(G)$, et π_ψ est la sous-représentation de $\pi \oplus \bar{\pi}$ obtenue en restreignant l'action de $\pi \oplus \bar{\pi}$ au sous-espace réel invariant \mathcal{H}_ψ (voir [Del], remarque V.3). De plus, pour tous $x, g \in G$, on a l'égalité

$$(3.1) \quad \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x).$$

4. PREUVE DU THÉORÈME

Soient π une représentation factorielle du groupe G telle que

$$H^1(G, \pi) \neq 0$$

et b un 1-cocycle continu à coefficients dans π qui n'est pas un cobord. Il s'agit de montrer que le support de π est contenu dans le cortex de G .

4.1 STRATÉGIE

On considère la fonction conditionnellement de type positif $\psi: G \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\psi(x) = -\|b(x)\|^2$$

et le triple GNS $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ correspondant.

Pour tout $g \in G$ on a une fonction

$$\psi^g: G \longrightarrow \mathbf{C}: x \longmapsto \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$$

qui est de type positif et qu'on va décomposer en une somme

$$(4.1) \quad \psi^g = \varphi^g + \chi^g$$

de deux fonctions de type positif (proposition 4.7).

Soit $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans \hat{G} . En utilisant l'hypothèse que b n'est pas un cobord, nous montrons qu'il existe $g \in G$ tel que la fonction φ^g est non nulle (proposition 4.8) et limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons linéaires de fonctions de type positif associées à des représentations de $\tilde{\mathcal{V}}$ (proposition 4.10).

La fin de la preuve est alors standard, et se déroule comme suit. Soit (\mathcal{K}, ρ, ξ) le triple GNS défini par φ^g . Il résulte de l'assertion ci-dessus que

le support de ρ est contenu dans l'adhérence de $\tilde{\mathcal{V}}$ pour la topologie de Fell. La décomposition (4.1) montre que ρ est une sous-représentation de la représentation GNS associée à ψ^g , qui est elle-même une sous-représentation de π_ψ ; et π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \bar{\pi}$. Quitte à échanger les rôles de π et $\bar{\pi}$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité car $H^1(G, \pi) \neq 0$ si et seulement si $H^1(G, \bar{\pi}) \neq 0$ et $\text{supp } \pi \subset \text{cor } G$ si et seulement si $\text{supp } \bar{\pi} \subset \text{cor } G$), on peut supposer que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π .

Le support de σ est dans l'adhérence de $\tilde{\mathcal{V}}$, puisqu'il est contenu dans le support de ρ . Comme π est une représentation factorielle, σ et π sont quasi-équivalentes (proposition 5.3.5 de [Dix]), d'où il résulte que leurs supports coïncident. Par suite

$$\text{supp } \pi = \text{supp } \sigma \subset \tilde{\mathcal{V}}.$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $\tilde{\mathcal{V}}$, le support de π est contenu dans le cortex de G .

4.2 THÉORÈME DE SCHOENBERG

Soit ψ une fonction conditionnellement de type positif sur un groupe G . Pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction φ_t définie par

$$\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$$

est de type positif. De plus,

$$(4.2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \psi$$

avec des limites au sens de la topologie de la convergence compacte (voir par exemple le théorème 5.16 de [HaVa]).

4.3 DÉCOMPOSITION DE CHOQUET

On dit qu'une mesure μ sur un espace Ω est *supportée* par une partie mesurable $A \subset \Omega$ si $\mu(\Omega \setminus A) = 0$.

Soit F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de F . On note $\text{ex } K$ l'ensemble des points extrémaux de K . Une mesure de probabilité μ supportée par $\text{ex } K$ détermine un unique élément $x \in K$ donné par la formule

$$x = \int_K y d\mu(y),$$

entendue au sens *-faible, c'est-à-dire au sens où

$$f(x) = \int_K f(y) d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K , supportée par $\text{ex } K$, telle que

$$x = \int_K y d\mu(y)$$

au sens *-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure μ qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac δ_x au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble $E_0(G)$ défini au numéro 3.2, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t supportée par $P(G) \cup \{0\}$ telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in L^1(G)$ (voir [Dix], proposition 13.6.8).

4.4 LOCALISATION

On note \mathcal{V} le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\tilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$P(G) \longrightarrow \hat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi.$$

On va décomposer les fonctions de type positif φ_t de la façon suivante. Soit \mathcal{W} un voisinage de la fonction constante 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = 1$, on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$. On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta)$$

et

$$\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) \\ &= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}.\end{aligned}$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$(4.3) \quad \begin{aligned}\frac{\varphi_t - 1}{t} &= \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \lambda_t)\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} \\ &= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1 - \lambda_t}{t} \left(\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}} \right).\end{aligned}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_t = 1$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ uniformément sur tout compact;
- (iii) pour tout $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de \mathcal{V} .

De plus, pour une sous-suite de φ_t que l'on indexe encore par t ,

- (iv) il existe une fonction $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ pour la topologie *-faible;

- (v) il existe un nombre réel positif λ tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \lambda_t}{t} \right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit K un compact convexe dans un espace métrisable. Soient $\varphi \in \text{ex } K$ un point extrémal de K et φ_t une suite d'éléments de K telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = \varphi$. Pour chaque t , on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta d\mu_t(\eta)$$

où μ_t est une mesure de probabilité supportée par $\text{ex } K$. Alors, pour tout voisinage \mathcal{W} de φ dans K , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \text{ex } K) = 1.$$

Preuve. L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge

faiblement sur K vers une mesure μ . La suite φ_t converge vers φ qui est un point extrémal, donc

$$\varphi = \int_{\text{ex } K} \eta d\mu(\eta)$$

et la mesure μ coïncide avec la mesure de Dirac δ_φ au point φ (Proposition 26.3 de [Cho]). De plus, toute sous-suite convergente de (μ_t) admet δ_φ comme limite. Autrement dit, δ_φ est l'unique point adhérent de la suite (μ_t) et $\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage \mathcal{W} contenant φ . La mesure μ_t est supportée par $\text{ex } K$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \text{ex } K) = 1$$

comme annoncé. \square

Preuve de (i). C'est une conséquence du lemme ci-dessus. En effet,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W}) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \text{ex } E_0(G)) = 1.$$

Preuve de (ii). Les fonctions $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à l'ensemble $E(G)$ sur lequel les topologies $*$ -faible et de la convergence compacte coïncident. Il suffit donc de montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Pour $f \in L^1(G)$, on a

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \varphi_t, f \rangle = \langle 1, f \rangle.$$

Le lemme implique que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(E_0(G) \setminus \mathcal{W}) = 0,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \left(\langle \varphi_t, f \rangle - \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta) \right) = \langle 1, f \rangle.$$

Preuve de (iii). Pour une partie A de $E_0(G)$, on désigne par \bar{A} l'adhérence de A dans $E_0(G)$ pour la topologie $*$ -faible et $\text{co}A$ son enveloppe convexe. Posons

$$K_{\mathcal{W}} := \overline{\text{co}(\mathcal{W} \cap P(G))}$$

et considérons la mesure $\mu_t^{\mathcal{W}}$, supportée par $\mathcal{W} \cap P(G)$, donnée par

$$\mu_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap \mathcal{W})}{\mu_t(\mathcal{W})} \quad \text{pour } A \subset E_0(G).$$

Ceci détermine une mesure de probabilité sur le compact convexe $K_{\mathcal{W}}$ telle que

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \int_{K_{\mathcal{W}}} \eta d\mu_t^{\mathcal{W}}(\eta).$$

La proposition 26.3 de [Cho] implique que $\varphi_t^{\mathcal{W}} \in K_{\mathcal{W}}$. Autrement dit, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit comme limite pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Or $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartient à $E(G)$ et $\text{co}(\mathcal{W} \cap P(G)) \subset E(G)$ sur lequel les topologies de la convergence compacte et $\sigma(L^\infty, L^1)$ coïncident, donc la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

Preuve de (iv). Comme la suite $(\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}})$ est contenue dans $E_0(G)$ qui est compact pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, il existe une sous-suite, encore indexée par t , et un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Supposons que $\varphi_0 \equiv 1$. En particulier, on peut supposer que les fonctions $\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$ qui apparaissent dans la sous-suite considérée sont toutes non nulles. Considérons la mesure $\tilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}$ définie par

$$\tilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(A) = \frac{\mu_t(A \cap (E_0(G) \setminus \mathcal{W}))}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \quad \text{pour } A \subset E_0(G).$$

Cette mesure est supportée par $(E_0(G) \setminus \mathcal{W}) \cap P(G)$, et donne pour tout t une décomposition de Choquet de $\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$.

Puisque $\varphi_0 \equiv 1$ est un point extrémal, la mesure de probabilité μ_0 qui donne une décomposition de Choquet de φ_0 est la mesure de Dirac en 1 et vérifie

$$\mu_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}.$$

Par conséquent,

$$1 = \mu_0(\mathcal{W}) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\mu}_t^{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) = 0,$$

ce qui est absurde.

Preuve de (v). Montrons d'abord qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\frac{1-\lambda_t}{t}$ soit borné pour $0 < t < t_0$.

Supposons que ce n'est pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite que l'on indexe encore par t , on peut supposer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) = +\infty.$$

Choisissons un $g_0 \in G$ tel que $\varphi_0(g_0) \neq 1$ et un voisinage ouvert relativement compact \mathcal{U} de g_0 dans G tel que

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \quad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

et une fonction $f \in L^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{U}$. L'équation (4.3) donne

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t-1}{t}\right), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t^{\mathcal{W}}-1}{t}\right), f \right\rangle + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \left\langle \operatorname{Re}(\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}), f \right\rangle.$$

Grâce au choix de f , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \operatorname{Re}(\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}), f \right\rangle = \left\langle \operatorname{Re}(\varphi_0 - 1), f \right\rangle < 0$$

et

$$\left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t^{\mathcal{W}}-1}{t}\right), f \right\rangle \leq 0.$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$, grâce à (4.2) on a

$$\left\langle \operatorname{Re} \psi, f \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \operatorname{Re}\left(\frac{\varphi_t-1}{t}\right), f \right\rangle = -\infty.$$

Comme ψ est continue et f est à support relativement compact, ceci mène à une contradiction. On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) = \lambda,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5. \square

4.6 CONSTRUCTIONS GNS

Fixons $g \in G$. En utilisant (3.1) et (4.2), on a

$$\left\langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x) \right\}$$

uniformément pour x parcourant les ensembles compacts de G .

On utilise alors l'égalité (4.3) pour trouver

$$\begin{aligned} & \langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} (\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)) \right. \\ & \quad + \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) (\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(xg) + \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(x)) \\ & \quad \left. - \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) (\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)) \right\} \end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant les parties compactes de G . Pour tout $t > 0$, soit $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$ (resp. $(\tilde{\mathcal{H}}_t, \tilde{\pi}_t, \tilde{\xi}_t)$) le triple GNS associé à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ (resp. $\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}$). En posant

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}} (\pi_t(g) \xi_t - \xi_t), \quad \alpha_t^g = \tilde{\pi}_t(g) \tilde{\xi}_t - \tilde{\xi}_t \quad \text{et} \quad \beta_t^g = \pi_t(g) \xi_t - \xi_t,$$

on trouve

$$(4.4) \quad \langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle \right. \\ \quad + \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle \\ \quad \left. - \left(\frac{1-\lambda_t}{t} \right) \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\}$$

pour la topologie de la convergence compacte et donc aussi pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^\infty, \mathbf{L}^1)$.

4.7. PROPOSITION. On pose $\alpha_0^g = \pi_0(g) \xi_0 - \xi_0$ où $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$ est le triple GNS associé à la fonction de type positif φ_0 apparaissant dans la proposition 4.5 (iv). Pour le reste, on conserve les notations précédentes.

- (i) $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle = \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^\infty, \mathbf{L}^1)$;
- (ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle = 0$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^\infty, \mathbf{L}^1)$;
- (iii) il existe une sous-suite de φ_t , toujours indexée par t , et une fonction de type positif φ^g telle que, pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^\infty, \mathbf{L}^1)$, on ait

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \varphi^g.$$

Preuve. L'assertion (i) est une conséquence du fait que

$$\varphi_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \tilde{\pi}_t(\cdot) \tilde{\xi}_t \mid \tilde{\xi}_t \rangle$$

pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, et que $\varphi_0 = \langle \pi_0(\cdot) \xi_0 \mid \xi_0 \rangle$. Grâce à 4.5 (ii) on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \xi_t \mid \xi_t \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$$

pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle = 0$$

pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Enfin, en utilisant la compacité de $E_0(G)$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, on peut extraire une sous-suite telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ existe. On note cette limite φ^g . \square

En passant à la limite dans (4.4), on écrit

$$(4.5) \quad \langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle = \varphi^g + \lambda \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle.$$

Pour chaque $g \in G$, ceci fournit un candidat pour une décomposition du type (4.1) avec $\chi^g = \lambda \langle \pi_0(\cdot) \alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle$. Il reste à vérifier qu'il existe un élément $g \in G$ tel que la fonction φ^g possède les bonnes propriétés.

4.8. PROPOSITION. *Si le cocycle b n'est pas un cobord, alors il existe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \neq 0$.*

Preuve. Si $\varphi^g \equiv 0$ pour tout $g \in G$, alors d'une part

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle\|_\infty &= \sup_{x \in G} |\langle \pi_\psi(x) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle| \\ &= \langle \pi_\psi(e) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle \\ &= -2 \psi(g) = 2 \|b(g)\|^2, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle\|_\infty &= \lambda \langle \pi_0(e) \alpha_0^g \mid \alpha_0^g \rangle \\ &= \lambda \langle \pi_0(g) \xi_0 - \xi_0 \mid \pi_0(g) \xi_0 - \xi_0 \rangle \\ &= 2\lambda (1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g)) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. La fonction de type positif φ_0 est bornée; l'égalité $\|b(g)\|^2 = \lambda(1 - \operatorname{Re} \varphi_0(g))$ implique que b est un cocycle borné sur G , donc un cobord. \square

Pour la suite, on fixe un élément $g \in G$ tel que $\varphi^g \neq 0$.

4.9. PROPOSITION. *Les fonctions de type positif $\langle \pi_t(\cdot) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ sont uniformément bornées pour $t > 0$, autrement dit*

$$\sup_{t>0} \sup_{x \in G} |\langle \pi_t(x) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle| < \infty.$$

Preuve. On a

$$\sup_{x \in G} |\langle \pi_t(x) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle| = \langle \pi_t(e) \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle = \|\eta_t^g\|^2.$$

On va montrer que $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est borné pour $t > 0$. Pour cela, écrivons l'égalité (4.4) au point $x = e$,

$$\|b_\psi(g)\|^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} & \langle \alpha_t^g \mid \alpha_t^g \rangle - \langle \beta_t^g \mid \beta_t^g \rangle \\ &= \left\{ 2 - 2 \operatorname{Re} \langle \tilde{\pi}_t(g) \tilde{\xi}_t \mid \tilde{\xi}_t \rangle \right\} - \left\{ 2 - 2 \operatorname{Re} \langle \pi_t(g) \xi_t \mid \xi_t \rangle \right\} \\ &= 2 \operatorname{Re} (\varphi_t^{\mathcal{W}}(g) - \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g)), \end{aligned}$$

et les suites

$$\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right), \quad |\varphi_t^{\mathcal{W}}(g)| \quad \text{et} \quad |\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}(g)|$$

sont bornées en t . Donc la suite $\langle \eta_t^g \mid \eta_t^g \rangle$ est également bornée. \square

4.10. PROPOSITION. *La fonction φ^g est limite pour la topologie de la convergence compacte de combinaisons convexes de fonctions de type positif associées à des représentations de $\tilde{\mathcal{V}}$.*

Preuve. Grâce aux propositions 4.7 (iii) et 4.9, la fonction de type positif φ^g est limite pour la topologie $*$ -faible de fonctions de type positif uniformément bornées associées aux représentations π_t . Ceci implique ([Fel1], Lemma 1.5) qu'il existe une suite θ_t de fonctions de type positif associées aux représentations π_t telle que

$$\varphi^g = \lim_{t \rightarrow 0} \theta_t$$

uniformément sur les compacts de G .

De plus, π_t est la représentation GNS associée à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ qui, d'après 4.5 (iii), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons

convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Donc les fonctions de type positif associées à π_t sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Finalement, φ^g est elle-même limite uniforme sur les compacts de combinaisons convexes d'éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Comme les fonctions de type positif appartenant à \mathcal{V} sont associées aux représentations de $\tilde{\mathcal{V}}$, ceci termine la preuve de la proposition. \square

On a donc établi une décomposition de la fonction $\langle \pi_\psi(\cdot) b_\psi(g) \mid b_\psi(g) \rangle$ comme annoncé en 4.1. Ceci termine la preuve du Théorème. \square

RÉFÉRENCES

- [BeHa] BEKKA, M. et P. DE LA HARPE. Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière. *Bull. Soc. Math. France* 122 (1994), 333–342.
- [BeKa] BEKKA, M. et E. KANIUTH. Irreducible representations of locally compact groups that cannot be Hausdorff separated from the identity representation. *J. reine angew. Math.* 385 (1988), 203–220.
- [BeLo] BEKKA, M. et N. LOUVET. On a variant of Kazhdan's property (T) for subgroups of semisimple groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 47 (1997), 1065–1078.
- [BLM] BOIDOL, J., J. LUDWIG et D. MÜLLER. On infinitely small orbits. *Studia Math.* 88 (1988), 1–11.
- [CoSt] COWLING, M. et T. STEGER. The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices. *J. reine angew. Math.* 420 (1991), 85–98.
- [Cho] CHOQUET, G. *Lectures on Analysis, Vol. 2*. W. A. Benjamin, 1969.
- [Dav] DAVIDSON, K. R. *C*-Algebras by Example*. Fields Institute Monographs 6. Amer. Math. Soc., 1996.
- [Del] DELORME, P. 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles — Produits tensoriels continus de représentations. *Bull. Soc. Math. France* 105 (1977), 281–336.
- [Dix] DIXMIER, J. *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Gauthier-Villars, 1969.
- [Fel1] FELL, J. M. G. The dual spaces of C*-algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* 94 (1960), 365–403.
- [Fel2] ——— Weak containment and induced representations of groups. *Canad. J. Math.* 14 (1962), 237–268.
- [Gui1] GUICHARDET, A. Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations. *J. Multivariate Anal.* 6 (1976), 138–158.
- [Gui2] ——— Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Sci. Math. (2)* 96 (1972), 305–332.
- [HaVa] DE LA HARPE, P. et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Astérisque 175. Soc. Math. de France, 1989.