4.4 Localisation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

$$f(x) = \int_K f(y)\, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur F ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément x de K peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K, supportée par $\operatorname{ex} K$, telle que

$$x = \int_K y\, d\mu(y)$$

au sens $*$-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où x est lui-même un point extrémal, la mesure μ qui donne une décomposition de Choquet du point x est unique et donnée par la mesure de Dirac δ_x au point x ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble $E_0(G)$ défini au numéro 3.2, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t supportée par $P(G) \cup \{0\}$ telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f\rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f\rangle\, d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(G)$ (voir [Dix], proposition 13.6.8).

4.4 Localisation

On note $\mathcal{V}$ le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$P(G) \longrightarrow \widehat{G} \colon \varphi \longmapsto \pi_\varphi\,.$$

On va décomposer les fonctions de type positif φ_t de la façon suivante. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage de la fonction constante 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$. Puisque $\lim_{t\to 0} \varphi_t = 1$, on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$. On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta)$$

et

$$\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\mu_t(\mathcal{W})} \displaystyle\int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \eta\, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\varphi_t = \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G)\setminus \mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$
$$= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} .$$

En posant $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$, on obtient

$$\text{(4.3)} \qquad \frac{\varphi_t - 1}{t} = \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1-\lambda_t)\, \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}$$
$$= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1-\lambda_t}{t}\left(\widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t{}^{\mathcal{W}}\right) .$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

(i) $\lim_{t\to 0} \lambda_t = 1$ *;*

(ii) $\lim_{t\to 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ *uniformément sur tout compact;*

(iii) *pour tout* $t > 0$, $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ *est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de* $\mathcal{V}$.

De plus, pour une sous-suite de φ_t *que l'on indexe encore par* t,

(iv) *il existe une fonction* $\varphi_0 \in E_0(G)$, $\varphi_0 \not\equiv 1$ *telle que* $\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$ *pour la topologie* $*$*-faible;*

(v) *il existe un nombre réel positif* λ *tel que* $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda$.

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit* K *un compact convexe dans un espace métrisable. Soient* $\varphi \in \operatorname{ex} K$ *un point extrémal de* K *et* φ_t *une suite d'éléments de* K *telle que* $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. *Pour chaque* t, *on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta \, d\mu_t(\eta)$$

où μ_t *est une mesure de probabilité supportée par* $\operatorname{ex} K$. *Alors, pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* φ *dans* K, *on a*

$$\lim_{t\to 0} \mu_t\, (\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1 .$$

Preuve. L'ensemble $\mathcal{M}(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge