

## 4.4 Localisation

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$f(x) = \int_K f(y) d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue  $f$  sur  $F$  ([Cho], proposition 26.3). Réciproquement, tout élément  $x$  de  $K$  peut être représenté de cette manière. En effet, pour tout  $x \in K$  il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $K$ , supportée par  $\text{ex } K$ , telle que

$$x = \int_K y d\mu(y)$$

au sens \*-faible. Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point  $x$  (voir [Cho], Theorem 27.6). Dans le cas où  $x$  est lui-même un point extrémal, la mesure  $\mu$  qui donne une décomposition de Choquet du point  $x$  est unique et donnée par la mesure de Dirac  $\delta_x$  au point  $x$  ([Cho], proposition 26.3). En particulier, pour l'ensemble  $E_0(G)$  défini au numéro 3.2, il existe pour tout  $t > 0$  une mesure de probabilité  $\mu_t$  supportée par  $P(G) \cup \{0\}$  telle que

$$\varphi_t = \int_{E_0(G)} \eta d\mu_t(\eta)$$

au sens faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ , c'est-à-dire au sens où

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{E_0(G)} \langle \eta, f \rangle d\mu_t(\eta)$$

pour tout  $f \in L^1(G)$  (voir [Dix], proposition 13.6.8).

#### 4.4 LOCALISATION

On note  $\mathcal{V}$  le voisinage de la fonction 1 dans  $P(G)$  qui est l'image inverse de  $\tilde{\mathcal{V}}$  par l'application

$$P(G) \longrightarrow \hat{G}: \varphi \longmapsto \pi_\varphi.$$

On va décomposer les fonctions de type positif  $\varphi_t$  de la façon suivante. Soit  $\mathcal{W}$  un voisinage de la fonction constante 1 dans  $E_0(G)$  tel que  $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = 1$ , on peut supposer grâce au lemme ci-dessous que  $\mu_t(\mathcal{W}) \neq 0$ . On définit

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta)$$

et

$$\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \int_{\mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) + \int_{E_0(G) \setminus \mathcal{W}} \eta d\mu_t(\eta) \\ &= \mu_t(\mathcal{W})\varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \mu_t(\mathcal{W}))\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}}.\end{aligned}$$

En posant  $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$ , on obtient

$$(4.3) \quad \begin{aligned}\frac{\varphi_t - 1}{t} &= \frac{\lambda_t \varphi_t^{\mathcal{W}} + (1 - \lambda_t)\tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} \\ &= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{1 - \lambda_t}{t} \left( \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}} \right).\end{aligned}$$

4.5. PROPOSITION. *On conserve les notations précédentes.*

- (i)  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_t = 1$ ;
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$  uniformément sur tout compact;
- (iii) pour tout  $t > 0$ ,  $\varphi_t^{\mathcal{W}}$  est limite uniforme sur tout compact de combinaisons convexes d'éléments de  $\mathcal{V}$ .

De plus, pour une sous-suite de  $\varphi_t$  que l'on indexe encore par  $t$ ,

- (iv) il existe une fonction  $\varphi_0 \in E_0(G)$ ,  $\varphi_0 \not\equiv 1$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_t^{\mathcal{W}} = \varphi_0$  pour la topologie \*-faible;

- (v) il existe un nombre réel positif  $\lambda$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \lambda_t}{t} \right) = \lambda$ .

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *Soit  $K$  un compact convexe dans un espace métrisable. Soient  $\varphi \in \text{ex } K$  un point extrémal de  $K$  et  $\varphi_t$  une suite d'éléments de  $K$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_t = \varphi$ . Pour chaque  $t$ , on se donne une décomposition de Choquet*

$$\varphi_t = \int_K \eta d\mu_t(\eta)$$

où  $\mu_t$  est une mesure de probabilité supportée par  $\text{ex } K$ . Alors, pour tout voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\varphi$  dans  $K$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \text{ex } K) = 1.$$

*Preuve.* L'ensemble  $\mathcal{M}(K)$  des mesures de probabilité sur  $K$  est compact pour la topologie faible. Il existe donc une sous-suite  $\mu_{t_k}$  de  $\mu_t$  qui converge