1. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 47 (2001), p. 161–172

UNE QUINTIQUE DE GENRE 1 QUI CONTREDIT LE PRINCIPE DE HASSE

par Christian WUTHRICH

1. INTRODUCTION

Le sujet de ce travail est de construire un contre-exemple au principe de Hasse (voir par exemple [CCS]) pour la famille des quintiques de genre 1.

THÉORÈME 1.1. *La courbe projective plane $C/\mathbf{Q}$, de genre géométrique 1, ayant cinq points doubles et donnée par l'équation*

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & x^5 + y(-6x^4 + 10x^3y - x^2y^2 - 6xy^3 + y^4) \\ & + z(4x^4 + 2x^3z - 5x^2z^2 - 2xz^3 + z^4) \\ & + \frac{1}{16}yz(-224x^3 + 108x^2y + 116xy^2 + 10y^3 + 68x^2z \\ & \qquad - 166xyz - 80y^2z + 160xz^2 + 81yz^2 - 56z^3) = 0,\end{aligned}$$

possède des points lisses dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$, mais aucun point rationnel.

Dans les années 40, Lind [Li] et Reichardt [Re] ont montré par des contre-exemples que le principe ne s'applique pas aux courbes de genre 1. La cubique diagonale découverte par Selmer [Se], $3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$, est le contre-exemple le plus connu. Aujourd'hui, on connaît même des familles algébriques dont toutes les courbes sont de genre 1 et contredisent le principe de Hasse (voir [CP]).

Après avoir trouvé cette courbe et sa jacobienne, j'ai pris connaissance des travaux de T. A. Fisher, qui dans sa thèse [Fi] construit d'autres exemples de quintiques qui contredisent le principe de Hasse par une méthode différente de celle utilisée ici. Il obtient ses exemples comme torseurs de courbes elliptiques, mais il doit apparemment se restreindre à des courbes elliptiques avec 5-torsion sur $\mathbf{Q}$.

La première partie de cet article décrit la méthode pour construire les courbes qui satisfont la condition géométrique, en utilisant des surfaces de Del Pezzo de degré 4. Après la construction du contre-exemple, la démonstration du théorème est expliquée en détail. J'aimerais attirer l'attention sur la démonstration du cas global qui contient des éléments originaux, comme l'examen simultané – *pour une même équation* – de deux éléments qui sont des normes: voir (4.1) et (4.2). Entièrement programmée sur ordinateur, elle a été appliquée à des familles de courbes pour tamiser un contre-exemple. La fin de l'article est réservée au calcul de la jacobienne E associée à cette quintique qui nous sert de contre-exemple. La normalisée de C représente alors un élément d'ordre 5 dans le groupe de Tate-Shafarevich $\text{Ш}(E/\mathbf{Q})$.

2. Quintiques planes de genre 1

Soit ω un nombre algébrique de polynôme minimal

$$p(X) = g_0 + g_1 X + g_2 X^2 + g_3 X^3 + g_4 X^4 + X^5$$

sur $\mathbf{Q}$. Soit $P_1 = (1 : \omega : \omega^2) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{Q}(\omega))$ et soient P_2, P_3, P_4 et P_5 ses conjugués sur $\mathbf{Q}$. On introduit la notation B pour la conique $xz - y^2 = 0$ qui est définie par les P_i. Nous allons chercher toutes les quintiques $C/\mathbf{Q}$ du plan ayant des points doubles en P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Pour cela nous considérons le système linéaire complet des cubiques passant par les points P_i. Prenons comme base les cubiques $A_i/\mathbf{Q}$ suivantes:

$$A_0:\ x(xz - y^2) = 0\,, \qquad A_1:\ y(xz - y^2) = 0\,, \qquad A_2:\ z(xz - y^2) = 0\,,$$

$$A_3:\ g_0 x^3 + g_1 x^2 y + g_2 x^2 z + g_3 xyz + g_4 xz^2 + yz^2 = 0\,,$$

$$A_4:\ g_0 x^2 y + g_1 x^2 z + g_2 xyz + g_3 xz^2 + g_4 yz^2 + z^3 = 0\,.$$

Ceci donne une application birationnelle j de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ dans une surface S de Del Pezzo de degré 4 dans $\mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$, isomorphe au plan éclaté en les cinq points P_i, voir [Be].

Un petit calcul de syzygies montre que S est égale à l'intersection complète des deux quadriques

$$\mathcal{Q}_0:\ x_0 x_4 - x_1 x_3 = g_1 x_0^2 + g_3 x_0 x_2 + x_2^2$$

$$\mathcal{Q}_1:\ x_2 x_3 - x_1 x_4 = g_0 x_0^2 + g_2 x_0 x_2 + g_4 x_2^2$$

définies sur $\mathbf{Q}$.