4. Choix de la courbe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **47 (2001)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

en cinq idéaux premiers distincts dans $\mathcal{O}_K$ tandis que les $p \not\equiv \pm 1 \pmod{11}$ différents de 11 restent premiers. *PARI-GP®* trouve une base des unités modulo torsion, à savoir: $\{\theta - 2,\ \theta - 3,\ \theta^2 - 5\theta + 5,\ \theta^4 - 8\,\theta^3 + 21\,\theta^2 - 20\,\theta + 5\}$.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $\xi \in \mathcal{O}_K$ avec $\xi \notin (\theta)$ on a*

$$N(\xi) = N_{K:\mathbf{Q}}(\xi) \equiv \pm 1 \pmod{11}.$$

Preuve. Puisque $|N(\xi)| = N((\xi))$ et que (ξ) se factorise en idéaux premiers, il suffit de montrer que $N(\mathfrak{p}) \equiv \pm 1 \pmod{11}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq (\theta)$. Soit $\mathfrak{p}$ est au-dessus d'un premier rationnel $p \equiv \pm 1 \pmod{11}$ et alors sa norme est égal à $\pm p$, soit $\mathfrak{p}$ est de la forme $p\mathcal{O}_K$ et dans ce cas $N(\mathfrak{p}) = p^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$. □

REMARQUE. Dans l'appendice de [Co], Daniel Coray utilise cette extension $K:\mathbf{Q}$ pour construire une quintique qui contredit le principe de Hasse. Mais elle est lisse et donc de genre 6. L'équation s'écrit

$$N(x + \theta y) = z(z^2 + xz + x^2)(2z^2 + xz + x^2).$$

Par ailleurs, le premier contre-exemple qui est une courbe plane lisse de degré 5 a été construit par Fujiwara dans [Fu].

4. CHOIX DE LA COURBE

La quintique C qui nous servira de contre-exemple au principe de Hasse sera une combinaison linéaire

$$C = C_7 + \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + \lambda_4 C_4.$$

On choisit les coefficients g_i et λ_i tels que les termes sans z s'écrivent comme $N(x - \varepsilon y) = N_{K:\mathbf{Q}}(x - \varepsilon y)$ et que les termes sans y s'écrivent comme $N(x - \eta z)$ pour certains ε et $\eta \in K$. J'ai essayé avec un millier de choix différents de (ε, η) pour lesquels il existe des coefficients g_i et λ_i. Parmi ceux auxquels ma méthode de démonstration s'applique, j'ai choisi le plus simple:

$$\varepsilon = -1 + 4\theta - \theta^2 \in \mathcal{O}_K^* \quad \text{et} \quad \eta = -3 + \theta \in \mathcal{O}_K^*,$$

dont les normes sont

$$N(x - \varepsilon y) = x^5 - 6\,x^4 y + 10\,x^3 y^2 - x^2 y^3 - 6\,x y^4 + y^5$$

$$N(x - \eta z) = x^5 + 4\,x^4 z + 2\,x^3 z^2 - 5\,x^2 z^3 - 2\,x z^4 + z^5,$$

et les coefficients

$$\begin{array}{lllll} g_0 = 1\,, & g_1 = -3\,, & g_2 = \frac{5}{2}\,, & g_3 = 0\,, & g_4 = -\frac{7}{4}\,, \\ \lambda_0 = -6\,, & \lambda_1 = 1\,, & \lambda_2 = \frac{5}{8}\,, & \lambda_3 = -1\,, & \lambda_4 = -2\,. \end{array}$$

Cela nous donne la courbe C donnée par (1.1) dans le théorème principal. Le polynôme minimal de ω est $p(X) = 4 - 12X + 10X^2 - 7X^4 + 4X^5$, qui est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Dans la suite on pose $r := -16N(x - \varepsilon y)$ et $s := -16N(x - \eta z)$. Puis on constate que l'équation (1.1) peut être réécrite sous chacune des deux formes suivantes:

$$r = -16N(x - \varepsilon y) = z \cdot f\,, \tag{4.1}$$

$$s = -16N(x - \eta z) = y \cdot g\,, \tag{4.2}$$

où f et g sont des polynômes homogènes de degré 4 sur $\mathbf{Z}$.

5. Démonstration du cas local

PROPOSITION 5.1. *La courbe C donnée par* (1.1) *possède des points lisses dans tous les complétés de* $\mathbf{Q}$.

Preuve. Comme le degré de C est impair, il est clair que $C/\mathbf{R}$ possède un point lisse. On commence petit à petit par les premiers nombres premiers p.

Pour $p = 2$: lorsque l'on remplace z par $8z$ dans l'équation (1.1), on obtient une courbe dont la réduction modulo 2 est égale à

$$x^5 + x^2y^3 + y^5 + y^4z = 0\,.$$

Elle a un point lisse $(0:1:1)$ sur $\mathbf{F}_2$. Ensuite, on trouve facilement des points lisses de la réduction de C modulo p pour $2 < p < 19$: $(1:1:2)$ pour $\mathbf{F}_3$, $(0:1:3)$ pour $\mathbf{F}_5$, $(0:1:5)$ pour $\mathbf{F}_7$, $(1:0:7)$ pour $\mathbf{F}_{11}$, $(0:1:1)$ pour $\mathbf{F}_{13}$ et $(0:1:-2)$ pour $\mathbf{F}_{17}$.

LEMME 5.2. *Soit $p \geq 19$, soit $\widehat{C}$ la réduction de C modulo p. On suppose que $\widehat{C}$ n'est pas une composante de sa Hessienne H. Alors $\widehat{C}(\mathbf{F}_p)$ contient un point lisse.*

Preuve. On suppose d'abord que $\widehat{C}$ est irréductible. Soit $\hat{c}$ la normalisée de $\widehat{C}$. Si elle est une courbe de genre 1, alors par le théorème de Hasse-Weil pour la courbe lisse projective $\hat{c}$, on a