

2.3 More examples

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

skew-symmetric $d \times d$ matrix $M = (\mu_{ij})$ with respect to the basis B_1, \dots, B_d (mod $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$). Namely, $[B_i, B_j] = \mu_{ij}B_{d+1}$. Over \mathbf{Q} one can choose a canonical symplectic basis $\widehat{B}_1, \dots, \widehat{B}_d$ (mod $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$) so that the matrix \widehat{M} representing ω has l blocks of type

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

standing on the diagonal, the other entries being trivial. The rank of ω is equal to $2l$ and $2l = d - m$. In the basis B_1, \dots, B_{d+1} (we omit the 'hats') of \mathfrak{h}

$$[B_1, B_2] = [B_3, B_4] = \dots = [B_{2l-1}, B_{2l}] = B_{d+1},$$

all the other brackets being trivial. This completes the proof.

2.2 EXAMPLE OF A FREE NILPOTENT ALGEBRA

Let $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$ be the free nilpotent Lie algebra of class c on n generators. Then $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$ has a unique rational form $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q})$ up to isomorphism (cf. Theorem 2).

Indeed, let $\mathfrak{h} = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$ be a rational form of $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{R})$. We may suppose that x_1, \dots, x_n span (modulo the derived subalgebra) $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \cong \mathbf{Q}^n$. Consequently, \mathfrak{h} is generated by $\{x_1, \dots, x_n\}$ as a Lie algebra. There exists an epimorphism $\pi: \mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q}) \rightarrow \mathfrak{h}$ because $\mathfrak{f}_c(n, \mathbf{Q})$ is free. It must be an isomorphism since the dimension of \mathfrak{h} equals the dimension (not depending on the ground field) of a free nilpotent Lie algebra of class c on n generators.

2.3 MORE EXAMPLES

The purpose of this subsection is to sketch two more examples of Lie algebras with a unique rational form up to isomorphism.

Let \mathfrak{g}_t , $t \in \mathbf{R}$, be a family of real 6-dimensional Lie algebras with a basis $\{x_1, \dots, x_6\}$ such that

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= x_3, & [x_1, x_3] &= tx_5, & [x_1, x_5] &= x_6, \\ [x_2, x_3] &= x_4, & [x_2, x_4] &= x_5, & [x_3, x_4] &= x_6, \end{aligned}$$

other brackets being trivial. One can show that

1. $C^k \mathfrak{g}_t = \langle x_{k+1}, \dots, x_6 \rangle$, $k = 2, \dots, 5$, where $C^k \mathfrak{g}_t$ are the terms of the lower central series of \mathfrak{g}_t .
2. The centralizer \mathfrak{C} of $C^4 \mathfrak{g}_t$, that is, $\mathfrak{C} = \{c \in \mathfrak{g}_t \mid [c, C^4 \mathfrak{g}_t] = 0\}$ is spanned by x_2, \dots, x_6 .

3. Real Lie algebras \mathfrak{g}_0 and \mathfrak{g}_1 are not isomorphic but $\forall t \neq 0 \quad \mathfrak{g}_t \cong \mathfrak{g}_1$.
4. If $t \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ then the rational algebra $\mathfrak{g}_t \cong \mathfrak{g}_1$ over \mathbf{Q} .
5. \mathfrak{g}_0 and \mathfrak{g}_1 are two Lie algebras with a unique rational form up to isomorphism.
6. Let \mathfrak{g} be a split real simple Lie algebra of type G_2 , \mathfrak{h} be a Cartan subalgebra of \mathfrak{g} and $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ be the triangular decomposition of \mathfrak{g} with respect to \mathfrak{h} . Then \mathfrak{n}_+ is isomorphic to \mathfrak{g}_0 .

3. MALCEV'S EXAMPLE

In this Section we develop Malcev's example and prove Theorem 1.

Suppose that there is a \mathbf{Q} -isomorphism between \mathfrak{g}_t and \mathfrak{g}_s . It must be written in the following form (cf. [5]) since $C^2\mathfrak{g}_t = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle$, $C^3\mathfrak{g}_t = \langle x_5, x_6 \rangle$ and the centralizer \mathfrak{c} of $C^2\mathfrak{g}$, which is an ideal in this case, is spanned by x_3, \dots, x_6 .

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots \\ y_3 = \phantom{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots \\ y_4 = \phantom{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} + \phantom{a_{33}x_3} + a_{44}x_4 + \dots \end{cases}$$

We do not explicit the expressions for y_5, y_6 . Here y_1, \dots, y_6 are basis elements of \mathfrak{g}_s satisfying the relations (1.2).

We obtain after straightforward computations that

$$[y_1, y_2] = y_4 = \Delta x_4 + \dots,$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{44} \neq 0$. On the other hand,

$$\begin{cases} y_5 = [y_1, y_4] = \Delta(a_{11}x_5 + a_{12}x_6), \\ y_6 = [y_2, y_4] = \Delta(a_{21}x_5 + a_{22}x_6). \end{cases}$$

Hence,

$$(3.1) \quad \begin{cases} x_5 = (a_{22}y_5 - a_{12}y_6)/\Delta^2, \\ x_6 = (a_{11}y_6 - a_{21}y_5)/\Delta^2. \end{cases}$$

We need to compute the remaining two brackets. First of all,

$$\begin{aligned} (3.2) \quad [y_1, y_3] &= a_{11}a_{33}[x_1, x_3] + a_{12}a_{33}[x_2, x_3] + a_{11}a_{34}[x_1, x_4] + a_{12}a_{34}[x_2, x_4] \\ &= a_{11}a_{33}x_6 + a_{12}a_{33}(x_5 + tx_6) + a_{11}a_{34}x_5 + a_{12}a_{34}x_6 \\ &= (a_{12}a_{33} + a_{11}a_{34})x_5 + (a_{11}a_{33} + a_{12}a_{34} + ta_{12}a_{33})x_6 = y_6. \end{aligned}$$