

# UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG

Autor(en): **Lamy, Stéphane**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-66078>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## UNE PREUVE GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE JUNG

par Stéphane LAMY

### 1. INTRODUCTION

L'espace affine complexe  $\mathbf{C}^n$  possède les qualités propres aux objets mathématiques fascinants : de nature très simple, il se trouve être à la base d'une multitude de problèmes intéressants et difficiles. En particulier le groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^n]$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbf{C}^n$  est loin d'être bien compris. L'étude de ces automorphismes est bien sûr intimement liée aux recherches autour de la fameuse Conjecture du Jacobien (voir [12]). De nombreuses autres questions relatives au groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^n]$  sont naturelles : on peut chercher à déterminer les sous-groupes finis, les sous-groupes de Lie, les sous-groupes linéarisables... On trouvera dans [21] un bel exposé de ces problématiques. Par ailleurs il est apparu récemment que ces automorphismes fournissent des exemples de systèmes dynamiques ayant un comportement très riche. Concernant ces problèmes un article fondateur est [13]; on pourra se reporter à [35] pour un panorama des progrès accomplis ces dix dernières années. Les questions que nous venons d'évoquer sont délicates en général, sans parler de la possibilité d'étudier ce qu'il advient lorsqu'on remplace  $\mathbf{C}$  par un corps quelconque, voire par un anneau. Cependant il existe un cas particulier pour lequel on possède de nombreux résultats : c'est celui de la dimension 2. On dispose en effet d'un théorème de structure, énoncé par H.W.E. Jung dès 1942, qui donne un système de générateurs pour  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$ .

Nous noterons  $A$  le groupe des automorphismes affines de  $\mathbf{C}^2$ , *i.e.* le groupe des éléments de  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  qui se prolongent en des automorphismes

holomorphes de  $\mathbf{P}^2$ ; et nous appellerons  $E$  (pour “élémentaire”, suivant les notations de [13]) le sous-groupe de  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  constitué des automorphismes qui préservent le pinceau des droites  $y = \text{constante}$ . Autrement dit :

$$A = \{(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2);$$

$$a_i, b_i, c_i \in \mathbf{C}, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0\};$$

$$E = \{(x, y) \mapsto (\alpha x + P(y), \beta y + \gamma); \alpha, \beta \in \mathbf{C}^*, \gamma \in \mathbf{C}, P \in \mathbf{C}[X]\}.$$

**THÉORÈME 1** (Jung, 1942). *Le groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  des automorphismes polynomiaux de  $\mathbf{C}^2$  est engendré par les automorphismes affines et élémentaires.*

Quelques années après Jung, ce résultat était précisé par W. Van der Kulk de la manière suivante :

**THÉORÈME 2** (Van der Kulk, 1953). *Etant donné un corps  $k$  (de caractéristique quelconque, algébriquement clos ou non), le groupe des automorphismes polynomiaux de  $k^2$  est engendré par les automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans  $k$ . De plus  $\text{Aut}[k^2]$  est le produit amalgamé de ces deux sous-groupes.*

Après les articles de Jung [19] et Van der Kulk [22] de nombreuses autres preuves, utilisant des techniques différentes, ont été proposées. L’objet de cet article étant de donner encore une nouvelle preuve, nous commençons, afin d’expliquer nos motivations, par un rapide survol des preuves disponibles dans la littérature. D’une manière générale, l’idée commune à toutes ces preuves est de procéder par récurrence sur le degré; ainsi étant donné un automorphisme

$$g: (x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

où  $g_1, g_2$  sont des polynômes de degrés respectifs  $d_1$  et  $d_2$ , il s’agit de montrer que l’on peut abaisser le degré de  $g$  en composant successivement par un automorphisme affine puis par un automorphisme élémentaire. Précisément, en composant par un automorphisme affine on peut supposer que  $d_1$  est strictement supérieur à  $d_2$ ; il reste alors à montrer que la composante homogène de plus haut degré de  $g_1$  est un multiple de celle de  $g_2$ , ce qui se ramène assez facilement à montrer que  $d_1$  est un multiple de  $d_2$ .

La preuve la plus voisine de la nôtre (c’est-à-dire de nature géométrique) est sans doute celle de M. Nagata [28], qui s’inspire de l’article de Van der Kulk. Antérieurement W. Engel [11] avait proposé une preuve, laquelle fut reprise par A. Gutwirth [17]. Nagata commente laconiquement ces deux preuves en

disant qu'elles lui semblent difficiles à lire. Quoi qu'il en soit, l'idée ici est de prolonger  $g$  en une application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$  et de considérer la courbe  $C$  préimage par  $g$  d'une droite générique. On obtient alors des informations sur les degrés  $d_1$  et  $d_2$  en étudiant la singularité de  $C$  à l'infini.

Dans l'optique de donner une preuve valable sur tout corps, L. Makar-Limanov [23] a proposé une alternative à la preuve de Van der Kulk en adoptant une approche complètement algébrique. L'idée est d'introduire un nouveau degré en accordant des poids différents aux variables  $x$  et  $y$ , en fonction des degrés associés à l'application inverse de  $g$ . Notons que quelques années plus tard ce même auteur propose par une approche similaire une description du groupe des automorphismes d'une large classe de surfaces affines [24]. Une preuve publiée par W. Dicks en 1983 [9] est une version quelque peu simplifiée de l'argument de Makar-Limanov; on trouvera une rédaction précise de cette preuve dans le livre de P.M. Cohn [8].

Une approche légèrement différente a été proposée par R. Rentschler. Il est assez aisé une fois le théorème de Jung-Van der Kulk acquis de montrer que toute représentation algébrique de  $(\mathbf{C}, +)$  dans  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  est donnée à conjugaison près par un automorphisme élémentaire. Rentschler emprunte le chemin inverse: il démontre d'abord cette propriété puis remarque que l'on peut en déduire le théorème de Jung. En effet, à l'automorphisme  $g$  on peut associer la dérivation localement nilpotente  $\partial/\partial g_1$ . Cette preuve, publiée comme note au CRAS en 1968 [31], a été reprise en détail récemment par L.M. Drużkowski et J. Gurycz [10].

Une preuve dite élémentaire est publiée en 1988 par J.H. McKay et S.S. Wang [26]; elle repose sur une formule d'inversion. Les auteurs montrent que l'application  $g^{-1}$  peut s'exprimer à l'aide d'un calcul de résultants mettant en jeu les polynômes à une variable  $g_1(0, t)$ ,  $g_1(t, 0)$ ,  $g_2(0, t)$ ,  $g_2(t, 0)$ . La relation souhaitée entre  $d_1$  et  $d_2$  en découle.

A l'opposé, on pourra trouver une preuve "sophistiquée" dans le livre de K. Matsuki [25]. L'idée ici est d'utiliser le cadre fourni par la théorie de Mori pour formuler une preuve du théorème de Jung, avec l'espoir que cette démarche permette ensuite d'attaquer l'étude jusqu'alors quasi-inaccessible de la structure du groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^n]$  pour  $n \geq 3$ .

Citons enfin une dernière approche: dans [1], S.S. Abhyankar et T.T. Moh démontrent que deux plongements biréguliers de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}^2$  diffèrent par un automorphisme de  $\mathbf{C}^2$ , et remarquent que leur preuve implique le théorème de Jung. Divers auteurs ont proposé de nouvelles preuves de ce résultat; on peut citer les articles récents de R.V. Gurjar [16], E. Casas-Alvero [6] et E. Artal-Bartolo [3], tous trois proposant des démonstrations de nature géométrique.

Nous allons voir cependant que si l'objectif est seulement d'obtenir une preuve du résultat de Jung il est possible de donner une preuve géométrique beaucoup plus concise.

A l'origine de notre travail se trouve un postulat fort naturel : le théorème de Jung est un résultat de géométrie birationnelle. Tout automorphisme de  $\mathbf{C}^2$  peut en effet se prolonger en une application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$ . Dans ce contexte il nous semble qu'effectuer une récurrence sur le degré n'est pas la démarche la plus naturelle; le nombre de points d'indétermination s'avère être une quantité plus facile à manipuler. Ceci n'était pas vraiment le point de vue de Jung, malgré son titre: "Sur les transformations birationnelles entières du plan". Cependant, dans une note qui semble être passée inaperçue, O.-H. Keller [20] réagit au travail de Jung en remarquant, sans donner de détails, qu'il est certainement possible de donner une preuve simplifiée en utilisant les résultats connus sur les applications birationnelles de  $\mathbf{P}^2$ . Plus tard, dans un court article I. R. Shafarevich [32] énonce le théorème de Jung en indiquant que la démonstration repose sur la possibilité de décomposer toute application birationnelle entre surfaces compactes comme une suite d'éclatements (c'est le théorème 6 énoncé au paragraphe suivant); malheureusement il ne semble jamais avoir eu l'occasion de publier une telle preuve (dans le complément à son article [34] Shafarevich se contente de renvoyer à un travail de M. H. Gizatullin et V. I. Danilov [14] qui de par son ambition de généralité maximale s'avère de lecture difficile). Enfin, récemment S. Orevkov [30] signale que l'on peut retrouver le théorème de Jung à partir d'un travail de A. G. Vitushkin, mais à nouveau les détails ne sont pas explicités.

Le théorème de Jung est en effet à mettre en parallèle avec un résultat classique généralement attribué à M. Noether [29]:

**THÉORÈME 3** (Noether, 1872). *Toute application birationnelle du plan projectif  $\mathbf{P}^2$  se décompose à l'aide d'automorphismes linéaires et de l'involution quadratique standard*

$$\sigma : [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy].$$

Il semble que la première preuve complète de cet énoncé soit en fait due à G. Castelnuovo [7], qui déduit le théorème de Noether du résultat intermédiaire suivant :

**THÉORÈME 4** (Castelnuovo, 1901). *Toute application birationnelle du plan projectif  $\mathbf{P}^2$  s'écrit comme une composition d'automorphismes linéaires et d'applications dites de Jonquières.*

A propos des applications de type de Jonquières disons simplement que ce sont les applications de degré  $n$  admettant un point base de multiplicité  $n-1$  ; le fait remarquable est que les automorphismes polynomiaux qui s'étendent en des applications de type de Jonquières sont précisément (à conjugaison affine près) les automorphismes élémentaires. Ainsi le théorème de Jung peut être vu comme un cas spécial du résultat de Castelnuovo. On pourra trouver dans [27] une preuve du théorème 3 très proche en esprit de la preuve du théorème de Jung que nous proposons dans cet article. Il peut sembler paradoxal que le théorème de Castelnuovo remonte à 1901, alors que celui de Jung qui s'avère être un cas particulier plus facile (en particulier nous n'aurons pas besoin de la notion de multiplicité d'un point d'indétermination qu'utilise Nagata), remonte lui à 1942. Une réponse possible est que Castelnuovo tout comme ses contemporains ne se soit jamais préoccupé de ce problème.

On peut résumer notre démarche en disant que nous nous sommes proposés de donner une preuve du théorème de Jung telle qu'aurait pu la concevoir un géomètre du début du 20<sup>e</sup> siècle ; ou encore, la preuve qui nous paraît se cacher derrière les remarques de Keller et Shafarevich citées plus haut. Notre preuve a le mérite d'être concise, de ne faire intervenir aucun calcul, et de mettre en lumière pourquoi ce résultat est propre à la dimension 2. La méthode étant de nature géométrique, il nous a semblé plus transparent de nous cantonner au cas classique (à savoir que nous travaillons sur le corps  $\mathbf{C}$ ) ; cependant cette restriction n'est en rien essentielle ainsi que nous le remarquons en fin d'article.

L'article est organisé comme suit.

Le second paragraphe regroupe les résultats de géométrie birationnelle que nous utilisons ; ceux-ci sont tout à fait élémentaires et contenus dans votre livre favori d'introduction à la géométrie algébrique (qui est probablement [15], [18] ou [33]).

La preuve proprement dite du théorème de Jung est détaillée dans le troisième paragraphe.

Enfin, dans un dernier paragraphe nous illustrons notre méthode par un exemple puis nous démontrons le théorème de Van der Kulk. Nous indiquons d'abord comment retrouver géométriquement que  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  est le produit amalgamé des sous-groupes affine et élémentaire. Bien noter que ceci est essentiellement une remarque triviale (qui certes se révèle cruciale pour les applications), et que le résultat réellement délicat est celui contenu dans l'énoncé de Jung. Pour finir, nous montrons comment notre preuve s'adapte facilement au cas d'un corps quelconque.

## 2. APPLICATIONS BIRATIONNELLES ENTRE SURFACES

Notre démarche pour démontrer le théorème de Jung est de considérer un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$  comme une application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même, et d'utiliser un théorème de structure classique pour ce type d'applications. Parmi beaucoup de choix possibles nous avons pris comme référence pour ce paragraphe les deux premiers chapitres de [4].

Par surface nous entendrons toujours une surface complexe algébrique lisse, et par ouvert un ouvert de Zariski. Soient  $X$  et  $Y$  deux surfaces; une application rationnelle  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  est la donnée d'un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $Y$ , qui ne puisse pas s'étendre à un ouvert plus grand. Quand  $U = X$  on a un vrai morphisme: on réserve à ce cas la notation  $\varphi: X \mapsto Y$ . On montre facilement (voir [4, II.4]) que  $X \setminus U$  est un ensemble fini de points. Ainsi une application rationnelle n'est pas une application au sens strict, puisque qu'il existe un nombre fini de points hors du domaine de définition. Cependant l'image d'une courbe est elle toujours définie: si  $C$  est une courbe dans  $X$ , on définit la transformée stricte  $\varphi(C)$  de  $C$  par  $\varphi$  comme l'adhérence de l'image par  $\varphi$  de  $C \cap U$ . Bien noter que l'image d'une courbe (disons irréductible) peut être un point.

Une application birationnelle entre  $X$  et  $Y$  est la donnée d'une application rationnelle  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  qui induit un isomorphisme entre un ouvert de  $X$  et un ouvert de  $Y$ .

EXEMPLE. Considérons l'application suivante de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même (que nous avons déjà rencontrée lors de l'énoncé du théorème de Noether):

$$\sigma: [x : y : z] \dashrightarrow [yz : xz : xy].$$

L'application  $\sigma$ , dite application quadratique standard, est bien définie en dehors des trois points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$ . De plus  $\sigma$  induit un automorphisme de  $\mathbf{P}^2$  privé des trois droites  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . Nous laissons le lecteur vérifier par exemple que l'image par  $\sigma$  de la droite  $z = 0$  est le point  $[0 : 0 : 1]$ , que l'image d'une droite passant par  $[0 : 0 : 1]$  est encore une droite passant par  $[0 : 0 : 1]$ , et que l'image d'une droite générique est une conique passant par les trois points  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  et  $[0 : 0 : 1]$ .

Un exemple fondamental d'application birationnelle est l'application d'éclatement en un point, que nous rappelons brièvement. Soit  $S$  une surface,

et  $p$  un point de  $S$ . Il existe une surface  $\tilde{S}$  et un morphisme  $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$  tels que

- $E = \pi^{-1}(p)$  soit isomorphe à  $\mathbf{P}^1$  ;
- $\pi$  induise un isomorphisme de  $\tilde{S} \setminus E$  sur  $S \setminus p$ .

A isomorphisme près  $\tilde{S}$  et  $\pi$  sont uniques. On dit que  $\pi$  est l'application d'éclatement au point  $p$ , ou encore que  $\tilde{S}$  est l'éclaté de  $S$  en  $p$  ; la courbe rationnelle  $E$  est appelée le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Si  $C \subset S$  est une courbe passant par  $p$ , on note  $\tilde{C}$  la transformée stricte de  $C$ , c'est-à-dire l'adhérence de  $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$ . Par transformée totale de  $C$  on désigne le diviseur  $\pi^*C$  ; par exemple si  $C$  est lisse en  $p$  on a  $\pi^*C = \tilde{C} + E$ .

Rappelons que la surface  $S$  est munie d'une forme d'intersection : si  $D_1, D_2$  sont deux diviseurs (*i.e.* des sommes finies  $\sum \lambda_i C_i$  où les  $C_i$  sont des courbes irréductibles éventuellement singulières, et les  $\lambda_i$  sont des entiers relatifs), alors on peut définir un nombre d'intersection  $D_1 \cdot D_2$ . Lorsque  $D_1$  et  $D_2$  sont simplement deux courbes distinctes,  $D_1 \cdot D_2$  correspond au nombre de points d'intersection de ces deux courbes comptés avec multiplicité ;  $D_1 \cdot D_2$  est dans ce cas positif ou nul. On peut étendre cette définition naturelle pour donner un sens à l'intersection de deux diviseurs quelconques, en particulier on peut parler de l'auto-intersection d'un diviseur (voir [4, th. I.4]). Nous noterons  $D^2$  au lieu de  $D \cdot D$  l'auto-intersection d'un diviseur  $D$ . Bien noter que l'auto-intersection d'une courbe peut être négative. Le nombre d'intersection possède les propriétés agréables suivantes ( $D_1, D_2$  et  $D_3$  sont trois diviseurs) :

- Si  $D_2$  et  $D_3$  sont linéairement équivalents alors  $D_1 \cdot D_2 = D_1 \cdot D_3$  ;
- Avec les notations ci-dessus :

$$(\pi^*D_1 \cdot \pi^*D_2) = (D_1 \cdot D_2) ;$$

$$(E \cdot \pi^*D_1) = 0 .$$

Concernant l'action de l'éclatement sur les nombres d'intersection, nous utiliserons de manière répétée les égalités suivantes qui découlent facilement des propriétés que nous venons d'énoncer ( $C$  est toujours une courbe lisse passant par  $p$ ) :

FORMULES 5.  $E^2 = -1$  ;

$$\tilde{C}^2 = C^2 - 1 .$$

Précisons un point de vocabulaire. Suivant comment nous considérerons l'application  $\tilde{S} \mapsto S$  nous emploierons deux terminologies différentes : nous dirons que l'on passe de  $S$  à  $\tilde{S}$  en éclatant le point  $p$ , et que l'on passe



de  $\tilde{S}$  à  $S$  en contractant la courbe  $E$ . Dans la suite nous considérerons des suites d'éclatements. En notant  $\pi_{p_i}$  l'application d'éclatement au point  $p_i$ , nous aurons des applications de la forme  $\varphi: M \mapsto X$ , où  $M$  et  $X$  sont deux surfaces et  $\varphi = \pi_{p_n} \circ \dots \circ \pi_{p_1}$  (ici  $p_1 \in X$  et pour tout  $i \geq 2$ ,  $p_i$  appartient à la surface obtenue après éclatement des points  $p_1, \dots, p_{i-1}$ ). Dans cette situation nous dirons que  $p_1$  est le premier point éclaté par  $\varphi$ , ou inversement que le diviseur exceptionnel  $E_n$  produit par  $\pi_{p_n}$  est la première courbe contractée par  $\varphi$ .

Les éclatements suffisent à décrire toutes les applications birationnelles entre surfaces: c'est ce qu'exprime le résultat suivant (voir [4, II.12]).

**THÉORÈME 6** (Zariski, 1944). *Toute application birationnelle entre deux surfaces s'obtient comme une suite d'éclatements puis de contractions; autrement dit si  $X, Y$  sont des surfaces et*

$$g: X \dashrightarrow Y$$

*est une application birationnelle (qui n'est pas un isomorphisme), alors il existe une surface  $M$  et des suites d'éclatements  $\pi_1$  et  $\pi_2$  tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \dashrightarrow & g \dashrightarrow Y \end{array}$$

Suivant Beauville nous attribuons ce théorème à Zariski. La preuve, qui n'est pas très difficile, se décompose en deux étapes. La première étape consiste à composer  $g$  avec une suite d'éclatements  $\pi_1$  afin d'éliminer les points d'indétermination. On obtient ainsi un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \bar{g} \\ X & \dashrightarrow & g \dashrightarrow Y \end{array}$$

où  $\bar{g}$  est un morphisme. A noter que ce procédé peut s'appliquer à toute application rationnelle entre surfaces (voir [4, II.7]); et peut également s'adapter en dimension supérieure.

A contrario la deuxième étape, qui consiste à montrer que le morphisme  $\bar{g}$  est une suite de contractions (voir [4, II.11]) est tout à fait particulière au

cas d'un morphisme *birationnel* entre deux *surfaces*. On se ramène à montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 7. Soit  $\bar{g}: M \dashrightarrow Y$  un morphisme *birationnel* entre *surfaces*. Si  $y \in Y$  est un point où  $\bar{g}^{-1}$  n'est pas définie, alors  $\bar{g}$  se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{Y} & \\ h \nearrow & & \searrow \sigma \\ M & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \end{array}$$

où  $\sigma$  est l'éclatement en  $y$ , et  $h$  est un morphisme.

Nous allons proposer une preuve de cette proposition à l'aide d'un argument élémentaire de géométrie différentielle qui peut éclairer la démonstration donnée dans [4, II.8]. A noter qu'à aucun moment il n'est fait usage du critère de Castelnuovo (contraction des courbes rationnelles d'auto-intersection  $-1$ ). Nous admettons le

LEMME 8 (voir [4, II.10]). Si  $\varphi: X \dashrightarrow Y$  est une application *birationnelle* entre deux *surfaces*, et si  $x \in X$  est un point où  $\varphi$  est non définie, alors il existe une courbe  $C \subset Y$  telle que  $\varphi^{-1}(C) = x$ .

*Preuve de la proposition 7.* Supposons que  $h = \sigma^{-1} \circ \bar{g}$  ne soit pas un morphisme, et soit  $x \in M$  un point où  $h$  n'est pas défini. Dans cette situation d'une part  $\bar{g}(x) = y$  et  $\bar{g}$  n'est pas localement inversible en  $x$ ; d'autre part il existe une courbe dans  $\tilde{Y}$  qui est contractée sur  $x$  par  $h^{-1}$ . Cette courbe ne peut être que le diviseur exceptionnel  $E$  associé à  $\sigma$ . Considérons  $p$  et  $q$  deux points distincts de  $E$  où  $h^{-1}$  est bien définie, et  $C, C'$  deux germes de courbes lisses transverses à  $E$  en  $p$  et  $q$  respectivement. Alors  $\sigma(C)$  et  $\sigma(C')$  sont deux germes de courbes lisses transverses en  $y$ , qui sont image par  $\bar{g}$  de deux germes de courbes en  $x$ . La différentielle de  $\bar{g}$  en  $x$  est donc de rang 2, ce qui vient contredire le fait que  $\bar{g}$  n'est pas localement inversible en  $x$  (voir figure 1).  $\square$

Avant de commencer la preuve du théorème de Jung nous précisons quelques points de vocabulaire et expliquons dans quel contexte nous ferons usage du théorème de Zariski. Nous appellerons points d'indétermination de  $g$  les points que l'on éclate lors de la construction de  $\pi_1$ ; ce sont donc des points qui appartiennent ou bien à  $X$  ou bien à des éclatés de  $X$ . Les

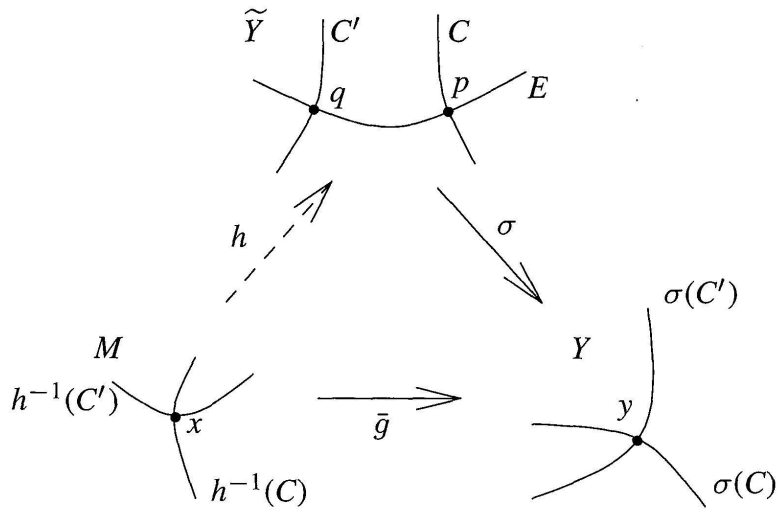


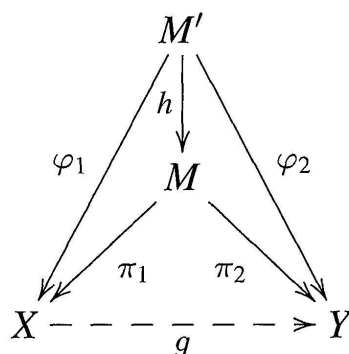
FIGURE 1

Supposer  $h$  non définie en  $x$  conduit à une contradiction

points d'indétermination contenus dans  $X$  seront dits points d'indétermination propres (classiquement on dit que les autres points sont dans des voisinages infiniment proches des points d'indétermination propres). Le nombre de points d'indétermination de  $g$  (propres ou non) sera noté  $\# \text{ind}(g)$ .

REMARQUE. A noter que cette définition est cohérente car les suites d'éclatements  $\pi_1$  et  $\pi_2$  produites par le théorème sont uniquement déterminées par  $g$  (à isomorphisme près). La suite  $\pi_1$  s'obtient précisément en éclatant successivement les points où  $g$  n'est pas définie. De manière symétrique la suite  $\pi_2$  est déterminée par les points où  $g^{-1}$  n'est pas définie. Bien sûr on pourrait rallonger artificiellement les suites  $\pi_1$  et  $\pi_2$  en éclatant des points où  $g$  et  $g^{-1}$  sont bien définies. Il est cependant implicite dans notre énoncé du théorème de Zariski que nous considérons les suites  $\pi_1$  et  $\pi_2$  minimales, au sens où elles vérifient la propriété universelle suivante (voir [2]):

Soient  $\varphi_1: M' \mapsto X$  et  $\varphi_2: M' \mapsto Y$  deux morphismes birationnels tels que  $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$ . Alors il existe un unique morphisme  $h: M' \mapsto M$  qui fasse commuter le diagramme:



Dans toute la suite nous utiliserons le théorème de Zariski seulement dans un cas bien particulier : nous considérerons  $g: X \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  provenant d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Nous entendons par là que l'on s'est donné une partition  $X = \mathbf{C}^2 \cup D$  où  $D$  est une réunion de courbes irréductibles (appelée diviseur à l'infini), une partition  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{C}^2 \cup L$  où  $L$  est une droite (droite à l'infini), et que  $g$  induit un isomorphisme de  $X \setminus D$  dans  $\mathbf{P}^2 \setminus L$ . Cette situation entraîne des contraintes fortes sur les points d'indétermination de  $g$  ; c'est ce qu'exprime le lemme suivant :

LEMME 9. *Soient  $X$  une surface et  $g$  une application birationnelle de  $X$  dans  $\mathbf{P}^2$  provenant d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Nous supposons de plus que  $g$  n'est pas un morphisme. Alors*

1.  *$g$  admet un seul point d'indétermination propre, situé sur le diviseur à l'infini de  $X$  ;*
2.  *$g$  admet des points d'indétermination  $p_1, \dots, p_s$  ( $s \geq 1$ ) tels que*
  - (a)  *$p_1$  soit le point d'indétermination propre ;*
  - (b) *pour tout  $i = 2, \dots, s$ , le point  $p_i$  soit situé sur le diviseur produit en éclatant  $p_{i-1}$  ;*
3. *chacune des courbes irréductibles contenues dans le diviseur à l'infini de  $X$  est contractée sur un point par  $g$  ;*
4. *la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée stricte d'une courbe contenue dans le diviseur à l'infini de  $X$  ;*
5. *en particulier, si  $X = \mathbf{P}^2$ , la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée de la droite à l'infini "à la source".*

*Preuve.* Nous savons (lemme 8) que si  $p$  est un point d'indétermination propre de  $g$  alors il existe une courbe qui est contractée sur  $p$  par  $g^{-1}$ . Dans notre situation la seule courbe de  $\mathbf{P}^2$  candidate à être contractée est la droite à l'infini ; il y a donc au plus un point d'indétermination propre pour  $g$  dans  $X$ . Comme nous supposons que  $g$  n'est pas un morphisme,  $g$  admet exactement un point d'indétermination propre. La deuxième affirmation découle alors par une récurrence immédiate. De même chaque courbe dans le diviseur à l'infini dans  $X$  est ou bien contractée sur un point, ou bien envoyée sur la droite à l'infini dans  $\mathbf{P}^2$ . Comme  $g^{-1}$  contracte la droite à l'infini sur un point, cette deuxième possibilité est exclue : nous avons montré la troisième assertion. De ce qui précède il découle que le diviseur à l'infini dans  $M$  est constitué du diviseur d'auto-intersection  $-1$  produit en éclatant  $p_s$ , des autres diviseurs produits au cours de la suite d'éclatements, tous d'auto-intersection inférieure ou égale à  $-2$ , et enfin de la transformée stricte du diviseur à

l'infini dans  $X$  (ici nous avons utilisé les formules 5). Comme la première courbe contractée par  $\pi_2$  doit être d'auto-intersection  $-1$ , et ne peut être la dernière courbe produite par  $\pi_1$  (car cela contredirait le fait que  $p_s$  est un point d'indétermination), on obtient bien que la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée stricte d'une courbe contenue dans le diviseur à l'infini de  $X$ . La dernière assertion n'est qu'une reformulation de la quatrième, dans le cas où  $X = \mathbf{P}^2$ .  $\square$

### 3. PREUVE DU THÉORÈME DE JUNG

Nous considérons  $g$  un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ , que nous prolongeons en une application birationnelle (toujours notée  $g$ ) de  $\mathbf{P}^2$  dans lui-même. Si  $g$  s'écrit

$$g: (x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y))$$

et que  $n$  est le degré de  $g$  (c'est-à-dire le plus grand des degrés de  $g_1$  et  $g_2$ ), alors en coordonnées homogènes l'extension de  $g$  à  $\mathbf{P}^2$  s'écrit

$$g: [x : y : z] \dashrightarrow [z^n g_1(x/z, y/z) : z^n g_2(x/z, y/z) : z^n].$$

La droite à l'infini dans  $\mathbf{P}^2$  est ici la droite d'équation  $z = 0$ . Nous voulons montrer que  $g$  s'écrit comme une composée d'automorphismes affines et élémentaires. La preuve va s'effectuer par récurrence sur le nombre  $\# \text{ind}(g)$  de points d'indétermination de  $g$ .

D'après le lemme 9 (assertion 1) le prolongement  $g: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  admet un unique point d'indétermination propre situé sur la droite à l'infini. En composant  $g$  par un automorphisme affine nous pouvons nous ramener au cas où ce point est  $[1 : 0 : 0]$ . Autrement dit nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{P}^2 & \\ a \nearrow & & \searrow g_0 \\ \mathbf{P}^2 & \dashrightarrow \frac{g}{g} & \dashrightarrow \mathbf{P}^2 \end{array}$$

où  $a$  est affine et  $g_0$  admet  $[1 : 0 : 0]$  comme point d'indétermination. Bien sûr on a

$$\# \text{ind}(g_0) = \# \text{ind}(g).$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{P}^2 & \\
 \varphi \nearrow & & \searrow g_0 \circ \varphi^{-1} \\
 \mathbf{P}^2 & \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{g_0} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

où  $\varphi$  est le prolongement d'un automorphisme élémentaire de  $\mathbf{C}^2$ , et tel que

$$\# \text{ind}(g_0 \circ \varphi^{-1}) < \# \text{ind}(g_0).$$

Notre démarche va consister à considérer le diagramme donné par le théorème de Zariski<sup>1)</sup>:

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 \mathbf{P}^2 & \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{g_0} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

et à réordonner les éclatements mis en jeu dans  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Ainsi, au cours de quatre étapes que nous allons maintenant détailler,  $\varphi$  va être construit en réalisant certains éclatements de la suite  $\pi_1$  et certaines contractions de la suite  $\pi_2$ .

#### PREMIÈRE ÉTAPE: ÉCLATEMENT DE $[1 : 0 : 0]$

Le point  $[1 : 0 : 0]$  est le premier point éclaté par  $\pi_1$ ; considérons donc la surface  $F_1$  obtenue en éclatant  $\mathbf{P}^2$  au point  $[1 : 0 : 0]$ . Cette surface est un compactifié de  $\mathbf{C}^2$  et est naturellement munie d'une fibration rationnelle correspondant aux droites  $y = \text{constante}$ . Le diviseur à l'infini est constitué de deux courbes rationnelles (*i.e.* isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ ) s'intersectant transversalement en un point. On distingue d'une part la transformée stricte de la droite à l'infini dans  $\mathbf{P}^2$ ; c'est une fibre que nous noterons  $f_\infty$ . D'autre part on a le diviseur exceptionnel de l'éclatement, qui est une section pour la fibration: nous la noterons  $s_\infty$ . On a bien sûr (appliquer les formules 5)  $f_\infty^2 = 0$  et  $s_\infty^2 = -1$ . Plus généralement pour tout  $n \geq 1$  nous noterons  $F_n$  un compactifié de  $\mathbf{C}^2$  muni d'une fibration rationnelle, tel que le diviseur à l'infini soit constitué de deux courbes rationnelles transverses: une fibre  $f_\infty$  et une section  $s_\infty$  d'auto-intersection  $-n$ . Ces surfaces sont classiquement

<sup>1)</sup> Chaque fois que nous utiliserons le théorème de Zariski nous noterons  $M$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  la surface et les suites d'éclatements produites, le contexte permettant d'éviter toute confusion.

appelées surfaces de Hirzebruch; nous ne présumons aucune connaissance particulière les concernant. Un point de notation: nous écrirons  $s_\infty(F_n)$  et  $f_\infty(F_n)$  quand plus d'une surface de Hirzebruch seront mises en jeu.

Revenons à l'application  $g_0$ . Considérons le diagramme commutatif:

(D1)

$$\begin{array}{ccc}
 & F_1 & \\
 \varphi_1 \nearrow & & \searrow g_1 \\
 \mathbf{P}^2 & \xrightarrow{g_0} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

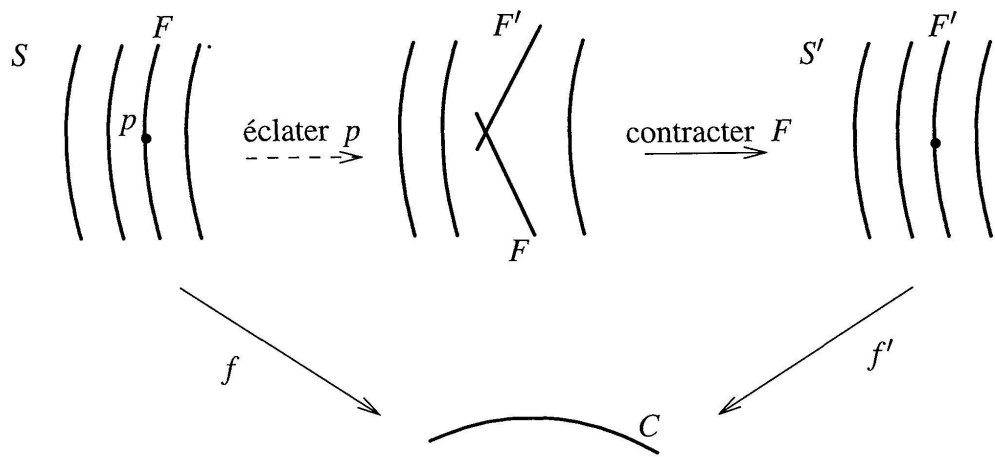
où  $\varphi_1^{-1}$  est l'application d'éclatement au point  $[1 : 0 : 0]$ . On a

$$\# \text{ind}(g_1) = \# \text{ind}(g_0) - 1.$$

Reprenons maintenant le diagramme donné par le théorème de Zariski appliqué à  $g_0$ . D'après le lemme 9 (assertion 5) la première courbe contractée par  $\pi_2$ , qui doit être une courbe dans  $M$  d'auto-intersection  $-1$ , est la transformée de la droite à l'infini. Celle-ci correspond à la fibre  $f_\infty$  dans  $F_1$ . Or dans  $F_1$  on a  $f_\infty^2 = 0$ . L'auto-intersection de cette courbe doit encore diminuer d'un, donc le point d'indétermination propre  $p$  de  $g_1$  est situé sur  $f_\infty$ . Par ailleurs on sait (lemme 9, assertion 2) que ce même point  $p$  appartient à la courbe produite par l'éclatement  $\varphi_1^{-1}$ , à savoir  $s_\infty$ . Finalement  $p$  est précisément le point d'intersection de  $f_\infty$  et  $s_\infty$ .

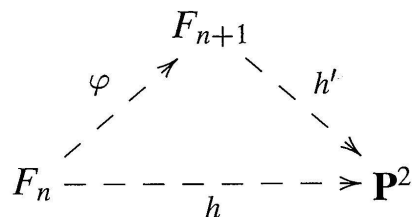
## DEUXIÈME ÉTAPE: RÉCURRENCE ASCENDANTE

Dans le raisonnement qui va suivre nous utiliserons des applications entre surfaces réglées généralement appelées "transformations élémentaires" (cependant nous n'emploierons pas cette terminologie, ce qui évitera d'ailleurs toute confusion avec les éléments du groupe  $E$ ). Ces transformations sont la composée d'un éclatement et d'une contraction. Plus précisément soit  $S$  une surface réglée, c'est-à-dire une surface munie d'une fibration  $f: S \rightarrow C$  où  $C$  est une courbe, et telle que toutes les fibres de  $f$  soient isomorphes à  $\mathbf{P}^1$ . Considérons  $p \in S$  et notons  $F$  la fibre contenant  $p$ . La transformation élémentaire au point  $p$  est l'application birationnelle qui consiste à éclater le point  $p$  (produisant ainsi un diviseur exceptionnel  $F'$ ) puis à contracter la transformée stricte de  $F$ . On obtient ainsi une nouvelle surface réglée  $S'$ .



Dans les preuves des lemmes 10 et 11 nous allons utiliser de telles transformations, pour des surfaces réglées de base  $C$  isomorphe à  $\mathbf{P}^1$ .

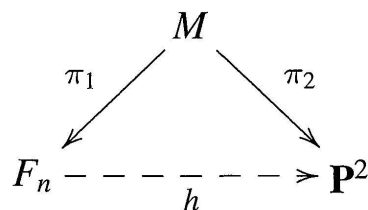
LEMME 10. Soit  $n \geq 1$ , et  $h$  une application birationnelle de  $F_n$  dans  $\mathbf{P}^2$  qui provient d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Supposons que l'unique point d'indétermination propre de  $h$  soit le point  $p$  intersection de  $f_\infty(F_n)$  et  $s_\infty(F_n)$ . Considérons le diagramme commutatif



où  $\varphi$  consiste à éclater  $p$  puis à contracter la transformée stricte de  $f_\infty$ . Alors l'application birationnelle  $h' = h \circ \varphi^{-1}$  satisfait les deux propriétés suivantes :

- $\# \text{ind}(h') = \# \text{ind}(h) - 1$  ;
- le point d'indétermination propre de  $h'$  est situé sur  $f_\infty(F_{n+1})$ .

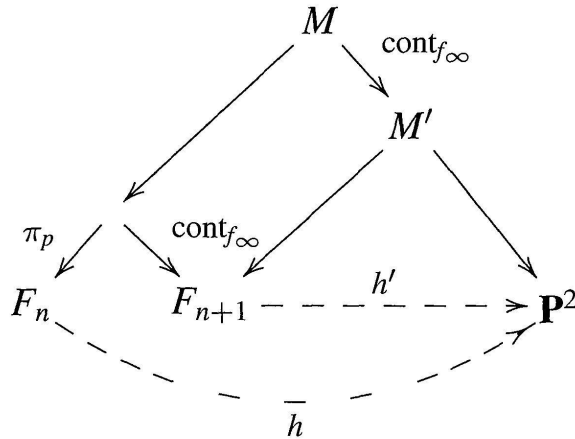
Preuve. Considérons la décomposition de  $h$  en suites d'éclatements :



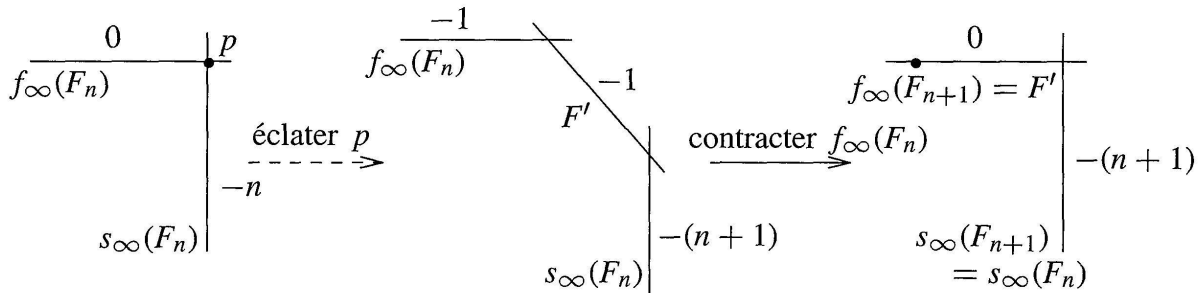
La transformée (stricte) de  $s_\infty(F_n)$  dans  $M$  est d'auto-intersection inférieure ou égale à  $-2$  ; le lemme 9 (assertion 4) nous permet d'en déduire que la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée de  $f_\infty(F_n)$ . La transformée de  $f_\infty(F_n)$  dans  $M$  est donc d'auto-intersection  $-1$  ; d'autre part dans  $F_n$  on a  $f_\infty(F_n)^2 = 0$ . On en déduit qu'après avoir éclaté  $p$  le



reste de la suite d'éclatements  $\pi_1$  concerne des points hors de  $f_\infty$ . Au lieu de réaliser ces éclatements puis de contracter la transformée de  $f_\infty(F_n)$  on peut renverser l'ordre, à savoir contracter  $f_\infty(F_n)$  puis réaliser le reste de la suite d'éclatements. Autrement dit on a un diagramme commutatif ( $\pi_p$  est l'éclatement en  $p$  et  $\text{cont}_{f_\infty}$  consiste à contracter la transformée de  $f_\infty(F_n)$ ):



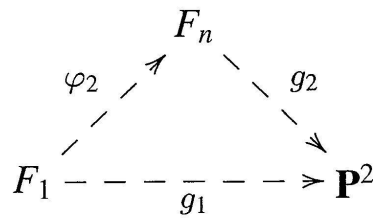
Les deux applications, éclatement de  $p$  puis contraction de  $f_\infty(F_n)$ , sont résumées dans le dessin suivant où l'on a représenté uniquement les diviseurs à l'infini, en précisant les auto-intersections (celles-ci étant calculées à l'aide des formules 5). On constate en particulier que la surface obtenue est bien de type  $F_{n+1}$ .



En conclusion, éclater  $p$  diminue d'un le nombre de points d'indétermination, et contracter la transformée de  $f_\infty(F_n)$  n'en introduit pas de nouveau: on a bien  $\# \text{ind}(h') = \# \text{ind}(h) - 1$ . D'autre part le point d'indétermination de  $h'$  est situé sur la courbe qui a été produite en éclatant  $p$ , à savoir  $f_\infty(F_{n+1})$ .  $\square$

A l'issue de la première étape nous sommes dans les conditions d'application du lemme 10, avec  $n = 1$ . Le lemme fournit une application  $h' : F_2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$  dont le point d'indétermination propre est situé sur la fibre  $f_\infty(F_2)$ . Si ce point est précisément le point d'intersection avec la section à l'infini, on peut de nouveau appliquer le lemme. En répétant ce processus aussi longtemps que l'on reste dans les hypothèses du lemme 10 on obtient un diagramme:

(D2)



où  $\varphi_2$  est obtenu en appliquant  $n - 1$  fois le lemme 10. De plus on a

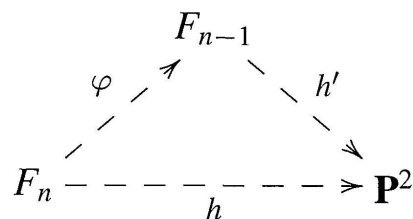
$$\# \text{ind}(g_2) = \# \text{ind}(g_1) - n + 1.$$

Enfin le point d'indétermination de  $g_2$  est situé sur  $f_\infty(F_n)$ , et n'est pas précisément le point d'intersection avec  $s_\infty(F_n)$  (sinon on pourrait appliquer le lemme une fois de plus).

TROISIÈME ÉTAPE : RÉCURRENCE DESCENDANTE

Nous allons appliquer le lemme suivant, qui est analogue au lemme 10 (mais bien noter qu'ici nous supposons  $n \geq 2$ ).

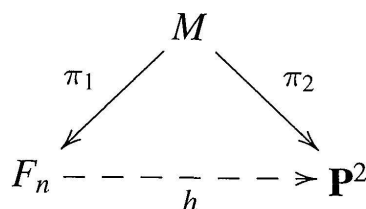
LEMME 11. Soit  $n \geq 2$ , et  $h$  une application birationnelle de  $F_n$  dans  $\mathbf{P}^2$  qui provient d'un automorphisme polynomial de  $\mathbf{C}^2$ . Supposons que l'unique point d'indétermination propre  $p$  de  $h$  soit situé sur  $f_\infty$  mais ne soit pas précisément le point d'intersection de  $f_\infty$  et  $s_\infty$ . Considérons le diagramme commutatif



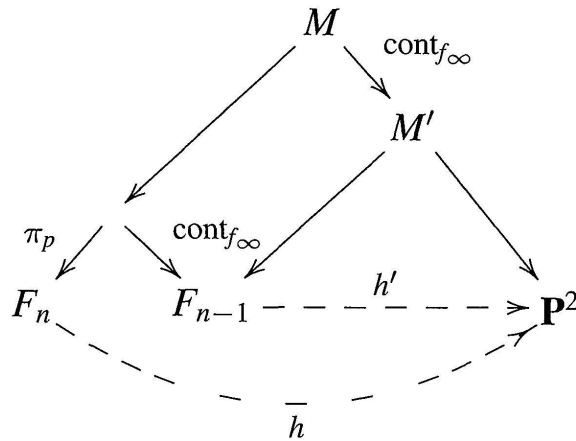
où  $\varphi$  consiste à éclater  $p$  puis à contracter la transformée stricte de  $f_\infty(F_n)$ . Alors l'application  $h'$  satisfait les deux propriétés suivantes :

- $\# \text{ind}(h') = \# \text{ind}(h) - 1$  ;
- le point d'indétermination propre de  $h'$  est situé sur  $f_\infty(F_{n-1})$  et n'est pas le point d'intersection de  $f_\infty(F_{n-1})$  et  $s_\infty(F_{n-1})$ .

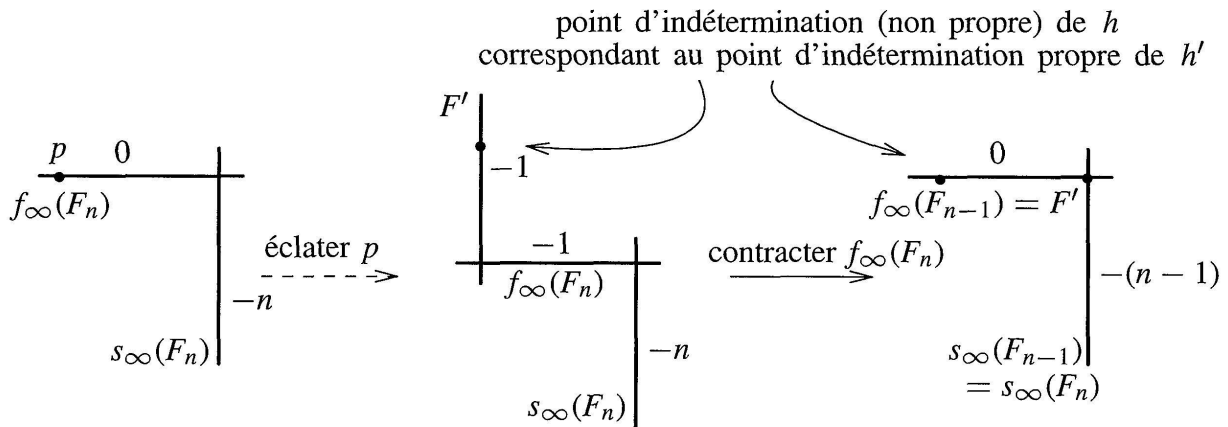
Preuve. Considérons la décomposition de  $h$  donnée par le théorème de Zariski :



La transformée de  $s_\infty(F_n)$  dans  $M$  est d'auto-intersection  $-n$ , comme  $n \geq 2$  on en déduit (lemme 9) que la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée de  $f_\infty(F_n)$ . Comme dans la preuve du lemme 10 on obtient un diagramme commutatif :



La surface obtenue en éclatant  $p$  puis en contractant la transformée de  $f_\infty$  est bien de type  $F_{n-1}$  ; ceci est résumé par le dessin suivant.



L'égalité  $\# \text{ind}(h') = \# \text{ind}(h) - 1$  est immédiate. Notons  $F'$  le diviseur produit en éclatant le point  $p$  ;  $h$  admet un point d'indétermination (non propre) situé sur  $F'$ . De plus ce point ne peut pas être précisément le point d'intersection de  $F'$  et de la transformée de  $f_\infty(F_n)$ , car sinon on aurait  $\pi_1^{-1}(f_\infty(F_n))$  d'auto-intersection inférieure ou égale à  $-2$  ce qui contredirait qu'il s'agit de la première courbe contractée par  $\pi_2$ . En conclusion ce point correspond au point d'indétermination propre de  $h'$ , et celui-ci est donc situé sur  $f_\infty(F_{n-1})$  et n'est pas le point d'intersection de  $f_\infty(F_{n-1})$  et  $s_\infty(F_{n-1})$ .  $\square$

Après la deuxième étape on se trouve dans les hypothèses du lemme 11. Remarquons de plus que si  $n \geq 3$  l'application  $h'$  produite satisfait encore les

hypothèses de ce même lemme. Après avoir appliqué  $n - 1$  fois le lemme 11 nous obtenons un diagramme

(D3)

$$\begin{array}{ccc}
 & F_1 & \\
 \varphi_3 \nearrow & & \searrow g_3 \\
 F_n & \text{---} \frac{g_2}{\text{---}} \text{---} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

avec

$$\# \text{ind}(g_3) = \# \text{ind}(g_2) - n + 1.$$

Enfin, le point d'indétermination propre de  $g_3$  est situé sur  $f_\infty(F_1)$ , et n'est pas le point d'intersection de  $f_\infty(F_1)$  et  $s_\infty(F_1)$ .

#### QUATRIÈME ÉTAPE : DERNIÈRE CONTRACTION

En appliquant le théorème de Zariski à  $g_3$  nous obtenons un diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 F_1 & \text{---} \frac{g_3}{\text{---}} \text{---} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

Le lemme 9 (assertion 4) affirme que la première courbe contractée par  $\pi_2$  est la transformée stricte par  $\pi_1$  ou bien de  $f_\infty$  ou bien de  $s_\infty$ . Supposons que ce soit la transformée de  $f_\infty$ . Alors après avoir réalisé la suite d'éclatements  $\pi_1$  et avoir contracté cette courbe, la transformée de  $s_\infty$  est d'auto-intersection 0 et ne pourra donc plus être contractée; ceci vient contredire la troisième assertion du lemme 9. La première courbe contractée est donc la transformée de  $s_\infty$ , que l'on peut contracter par avance pour obtenir le diagramme suivant :

(D4)

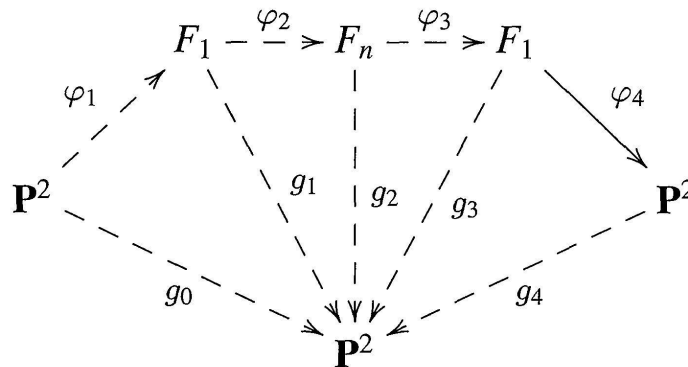
$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{P}^2 & \\
 \varphi_4 \nearrow & & \searrow g_4 \\
 F_1 & \text{---} \frac{g_3}{\text{---}} \text{---} & \mathbf{P}^2
 \end{array}$$

Le morphisme  $\varphi_4$  est l'application d'éclatement de diviseur exceptionnel  $s_\infty$ , que l'on peut choisir (puisque'elle est définie modulo isomorphisme) de manière à ce que le point sur lequel on contracte soit  $[1 : 0 : 0]$ . On a de plus

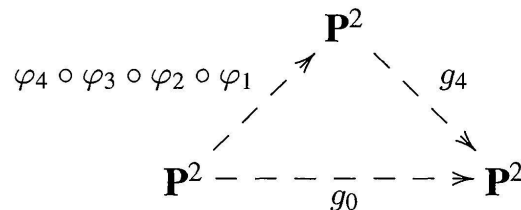
$$\# \text{ind}(g_3) = \# \text{ind}(g_4).$$

## CONCLUSION

On peut regrouper les quatre diagrammes (D1), ..., (D4) en un seul



soit de manière condensée :



avec

$$\# \text{ind}(g_4) = \# \text{ind}(g_0) - 2n + 1 \text{ (où } n \geq 2 \text{)}.$$

Reste à vérifier que  $\varphi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$  est un automorphisme élémentaire. Pour cela il suffit de constater que  $\varphi$  préserve le feuilletage  $y = \text{constante}$ , autrement dit que  $\varphi$  préserve le pinceau des droites passant par  $[1 : 0 : 0]$ . Or ceci est immédiat : l'éclatement  $\varphi_1$  envoie les droites passant par  $[1 : 0 : 0]$  sur les fibres de  $F_1$ ,  $\varphi_2$  et  $\varphi_3$  respectent les fibrations associées à  $F_1$  et  $F_n$ , et enfin la contraction  $\varphi_4$  envoie les fibres de  $F_1$  sur les droites passant par  $[1 : 0 : 0]$ . L'application  $g_4$  est donc un automorphisme de  $\mathbf{C}^2$  qui s'obtient en composant  $g$  avec un automorphisme affine puis un automorphisme élémentaire, et satisfaisant l'inégalité :

$$\# \text{ind}(g_4) < \# \text{ind}(g).$$

Par récurrence sur  $\# \text{ind}(g)$ , ceci termine la démonstration.

## 4. COMPLÉMENTS

## 4.1 UN EXEMPLE

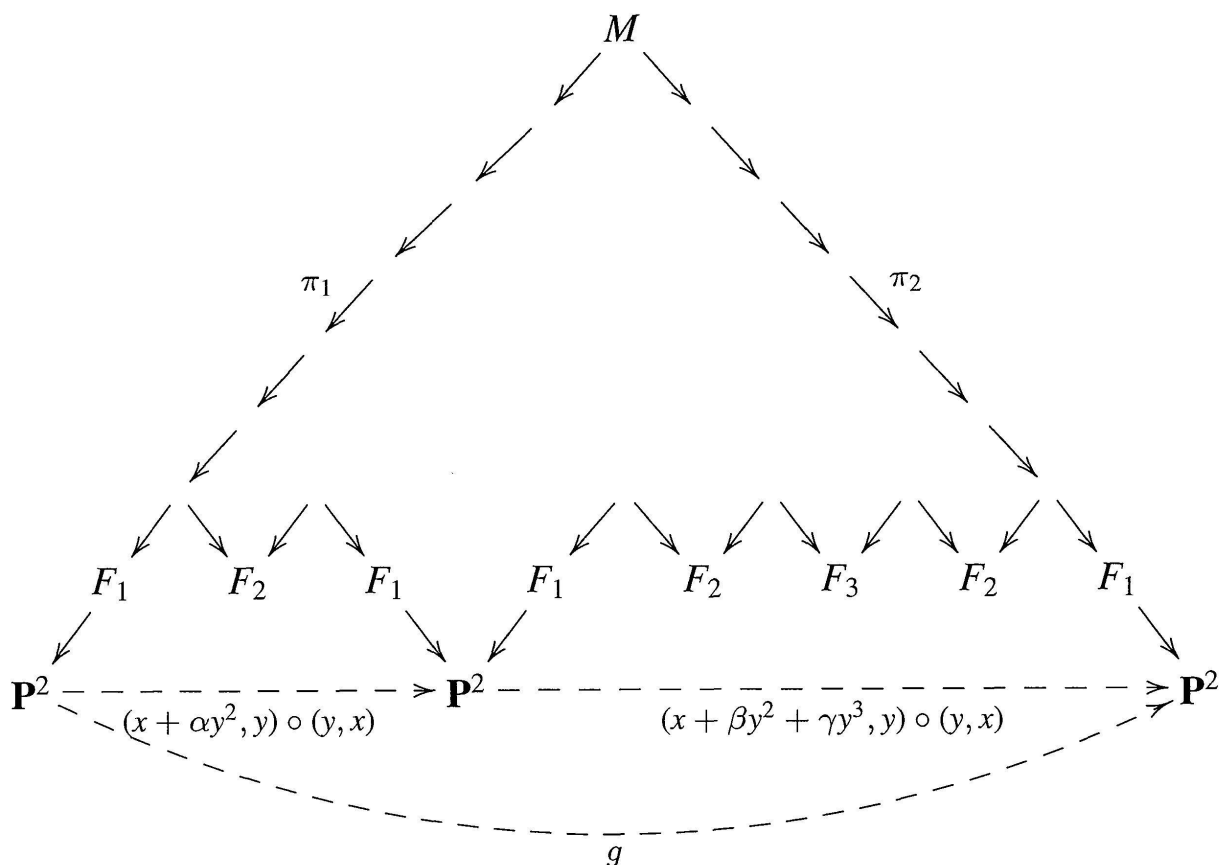
Considérons l'automorphisme  $g$  suivant :

$$g: (x, y) \mapsto (y + \beta(y + \alpha x^2)^2 + \gamma(y + \alpha x^2)^3, y + \alpha x^2) \text{ avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}^*.$$

La décomposition de  $g$  utilise deux automorphismes élémentaires :

$$g(x, y) = (x + \beta y^2 + \gamma y^3, y) \circ (y, x) \circ (x + \alpha y^2, y) \circ (y, x).$$

En appliquant le théorème de Zariski à  $g$  on décompose  $g$  à l'aide de huit éclatements puis huit contractions. Quand on applique notre algorithme à  $g$  on change l'ordre de ces éclatements et contractions comme le décrit le diagramme suivant :



Expliquons plus précisément comment est obtenu ce diagramme. Le point d'indétermination propre de  $g$  est  $[0 : 1 : 0]$ , on commence donc par considérer  $g \circ (y, x)$  qui est indéterminé en  $[1 : 0 : 0]$ . On éclate ce point, puis on applique une fois le lemme 10. Sur la surface  $F_2$  obtenue le point d'indétermination est situé sur la fibre  $f_\infty$  (l'emplacement exact est paramétré par le coefficient  $\alpha$ ). On applique alors une fois le lemme 11 puis on contracte la section  $s_\infty(F_1)$ . On a ainsi obtenu la décomposition :

$$g = g' \circ (x + \alpha y^2, y) \circ (y, x)$$

où  $g'$  n'admet plus que 5 points d'indétermination. On considère  $g' \circ (y, x)$  pour se ramener à un automorphisme dont le point d'indétermination propre est  $[1 : 0 : 0]$ . On éclate ce point, puis on applique deux fois le lemme 10. On est alors en situation d'appliquer deux fois le lemme 11 (l'emplacement exact

des points d'indétermination sur  $f_\infty(F_3)$  et  $f_\infty(F_2)$  dépend des coefficients  $\gamma$  et  $\beta$ ). Enfin on contracte la section  $s_\infty(F_1)$ , on a ainsi obtenu

$$g'(x, y) = (x + \beta y^2 + \gamma y^3, y) \circ (y, x).$$

#### 4.2 STRUCTURE DE PRODUIT AMALGAMÉ

Nous voulons montrer que  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  est non seulement engendré par les sous-groupes  $A$  et  $E$ , mais que de plus c'est le produit amalgamé de ces deux groupes. Autrement dit nous voulons montrer que toutes les relations dans le groupe  $\text{Aut}[\mathbf{C}^2]$  sont induites par les relations dans les groupes  $A$  et  $E$ . Ceci revient à montrer qu'une composition

$$h = a_1 \circ e_1 \circ \cdots \circ a_n \circ e_n \text{ avec } a_i \in A \setminus E, \quad e_i \in E \setminus A$$

n'est jamais égale à l'identité. Bien noter qu'on peut se restreindre à considérer des compositions  $h$  de cette forme, à savoir de longueur paire et commençant par un automorphisme affine. En effet si  $h$  est de longueur impaire (et supérieure à 3: bien sûr si  $h$  est de longueur 1 ce n'est pas l'identité) on peut faire baisser la longueur de  $h$  par conjugaison. De plus si  $h$  est de longueur paire et commence par un automorphisme élémentaire, il suffit de considérer  $h^{-1}$ .

Chaque automorphisme  $e_i$ , vu comme application birationnelle de  $\mathbf{P}^2$ , contracte la droite à l'infini sur le point  $[1 : 0 : 0]$  (car on suppose  $e_i \notin A$ ). De plus, dire que  $a_i \notin E$  revient à dire que le point  $[1 : 0 : 0]$  n'est pas un point fixe de  $a_i$ . On en déduit que l'extension de  $h$  à  $\mathbf{P}^2$  contracte la droite à l'infini sur le point  $a_1([1 : 0 : 0])$ , ce qui montre que  $h$  n'est pas l'identité.

#### 4.3 PREUVE SUR UN CORPS QUELCONQUE

Etant donné un corps  $k$  nous notons  $A_k$  et  $E_k$  les groupes affine et élémentaire à coefficients dans  $k$ ; par  $\bar{k}$  nous désignons la clôture algébrique de  $k$ . Une première remarque est que notre preuve fonctionne sans aucun changement dans le cas d'un corps algébriquement clos  $\bar{k}$  (la caractéristique du corps n'a pas d'importance). Les résultats sur la géométrie des surfaces que nous utilisons, à savoir les propriétés de la forme d'intersection (formules 5) et le théorème de décomposition de Zariski sont énoncés avec un tel degré de généralité par exemple dans le chapitre V de [18]. De même on peut recopier l'argument ci-dessus pour montrer que  $\text{Aut}[\bar{k}^2]$  est le produit amalgamé de  $A_{\bar{k}}$  et  $E_{\bar{k}}$ .

Considérons maintenant un corps  $k$  non algébriquement clos, et soit  $g$  un élément de  $\text{Aut}[k^2]$  de degré  $d$ . On sait déjà que  $g$  est une composée

d'automorphismes affines et élémentaires à coefficients dans  $\bar{k}$ . Nous allons maintenant en déduire qu'il existe une décomposition ne mettant en jeu que des éléments de  $A_k$  et  $E_k$ .

Comme précédemment nous considérons  $g$  comme une application birationnelle de  $\mathbf{P}_k^2$  dans lui-même. Le point crucial est que nous savons que  $g$  admet un *unique* point d'indétermination propre, qui est l'image par  $g^{-1}$  de la droite à l'infini. Choisissons un point  $p$  de la droite à l'infini dont les coordonnées homogènes soient dans  $k$  et qui ne soit pas le point d'indétermination de  $g^{-1}$  (l'un des deux points  $[1 : 0 : 0]$  ou  $[0 : 1 : 0]$  convient). Alors  $g^{-1}(p)$  est le point d'indétermination propre de  $g$ , et est donc contenu dans  $\mathbf{P}_k^2$ . Par un raisonnement symétrique le point d'indétermination propre de  $g^{-1}$  est également dans  $\mathbf{P}_k^2$ . En composant  $g$  à droite et à gauche par des éléments bien choisis de  $A_k$  on peut donc se ramener au cas où les points d'indétermination de  $g$  et  $g^{-1}$  sont tous deux  $[1 : 0 : 0]$ . Ceci revient à dire qu'on s'est ramené au cas où la décomposition de  $g$  dans le produit amalgamé de  $A_{\bar{k}}$  et  $E_{\bar{k}}$  commence et finit par un automorphisme élémentaire :

$$g = e_n \circ a_{n-1} \circ \cdots \circ a_1 \circ e_1 \text{ avec } a_i \in A_{\bar{k}} \setminus E_{\bar{k}}, \quad e_j \in E_{\bar{k}} \setminus A_{\bar{k}}.$$

Une récurrence immédiate montre alors que  $g$  s'écrit

$$g: (x, y) \mapsto (\gamma y^{d_1 \cdot d_2} + \cdots, \delta y^{d_1} + \cdots)$$

avec  $\gamma, \delta \in k^*$  et  $d_1, d_2 > 1$  (on a écrit seulement les composantes homogènes de plus haut degré). En composant  $g$  à gauche par l'automorphisme  $(x, y) \mapsto (x - \frac{\gamma}{\delta} y^{d_2}, y)$  qui est un élément de  $E_k$  on obtient un élément de  $\text{Aut}[k^2]$  de degré strictement inférieur à celui de  $g$ . Par récurrence sur le degré ceci termine la démonstration.

NOTE. Alors que cet article était soumis pour publication J. F. de Bobadilla m'a très aimablement écrit pour me signaler qu'il était l'auteur, de manière à la fois concomitante et indépendante, d'une preuve du théorème de Jung similaire à celle que j'ai exposée ici (voir le chapitre 1 de [5]).

REMERCIEMENTS. J'ai eu l'occasion d'exposer en détail ce travail à divers stades de son élaboration, successivement à l'ENS Lyon, l'Université Fédérale de Porto Alegre et l'Université de Rennes. J'ai chaque fois profité des nombreuses remarques et questions qui m'ont été formulées. Merci également à Thierry Vust pour ses suggestions qui m'ont permis de notablement améliorer la lisibilité de l'article.



## RÉFÉRENCES

- [1] ABHYANKAR, S. S. and T. T. MOH. Embeddings of the line in the plane. *J. reine angew. Math.* 276 (1975), 148–166.
- [2] ALBERICH-CARRAMIÑANA, M. *Geometry of the plane Cremona maps*. Lecture Notes in Math. 1769. Springer-Verlag, 2002.
- [3] ARTAL-BARTOLO, E. Une démonstration géométrique du théorème d'Abhyankar-Moh. *J. reine angew. Math.* 464 (1995), 97–108.
- [4] BEAUVILLE, A. *Surfaces algébriques complexes*. Astérisque 54, 1978.
- [5] DE BOBADILLA, J.F. Moduli spaces of polynomials in two variables. PhD thesis, Nijmegen, 2001.
- [6] CASAS-ALVERO, E. *Singularities of Plane Curves*. Cambridge University Press, 2000.
- [7] CASTELNUOVO, G. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Torino Atti* 36 (1901).
- [8] COHN, P.M. *Free Rings and their Relations*. (2<sup>nd</sup> ed.) London Mathematical Society Monographs 19, 1985.
- [9] DICKS, W. Automorphisms of the polynomial ring in two variables. *Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona* 27 (1983), 155–162.
- [10] DRUŽKOWSKI, L. M. and J. GURYCZ. An elementary proof of the tameness of polynomial automorphisms of  $k^2$ . *Univ. Iagel. Acta Math.* 35 (1997), 251–260.
- [11] ENGEL, W. Ganze Cremona Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene. *Math. Ann.* 136 (1958), 319–325.
- [12] VAN DEN ESSEN, A. *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*. Progress in Mathematics 190, Birkhäuser Verlag, 2000.
- [13] FRIEDLAND, S. and J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9 (1989), 67–99.
- [14] GIZATULLIN, M. H. and V. I. DANILOV, Automorphisms of affine surfaces I. *Math. USSR Izv.* 9 (1975), 493–534.
- [15] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley, 1978.
- [16] GURJAR, R. V. A new proof of the Abhyankar-Moh-Suzuki theorem. *Transformation groups* 7 (2002), 61–66.
- [17] GUTWIRTH, A. An inequality for certain pencils of plane curves. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 631–638.
- [18] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [19] JUNG, H. W. E. Über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. reine angew. Math.* 184 (1942), 161–174.
- [20] KELLER, O.-H. Zu einem Satze von H. W. E. Jung über ganze birationale Transformationen der Ebene. *J. reine angew. Math.* 186 (1944), 78–79.
- [21] KRAFT, H. Challenging problems on affine  $n$ -space. *Astérisque* 237 (1996), 295–317.
- [22] VAN DER KULK, W. On polynomial rings in two variables. *Nieuw Arch. Wisk.* 1 (1953), 33–41.
- [23] MAKAR-LIMANOV, L. G. On automorphisms of certain algebras. Candidate's dissertation, Moscou, 1970.

- [24] — On group of automorphisms of class of surfaces. *Israel J. Math.* 69 (1990), 250–256.
- [25] MATSUKI, K. *Introduction to the Mori program*. Universitext, Springer, 2002.
- [26] MCKAY, J.H. and S.S. WANG. An elementary proof of the automorphism theorem for the polynomial ring in two variables. *J. Pure Appl. Algebra* 52 (1988), 91–102.
- [27] NAGATA, M. On rational surfaces I. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math.* 32 (1960), 351–370.
- [28] — *On automorphism group of  $k[x, y]$* . Dept. of Mathematics, Kyoto Univ., Lectures in Mathematics 5. Kinokuniya, 1972.
- [29] NOETHER, M. Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.* 5 (1872), 635–639.
- [30] OREVKOV, S.Y. When a chain of blowups defines an automorphism of  $\mathbf{C}^2$ . *Math. Notes* 67 (2000), 541–543.
- [31] RENTSCHLER, R. Opérations du groupe additif sur le plan affine. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* 267 (1968), 384–387.
- [32] SHAFAREVICH, I.R. On some infinite-dimensional groups. *Rend. Mat. e Appl.* (5) 25 (1966), 208–212.
- [33] — *Basic Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [34] — On some infinite-dimensional groups II. *Math. USSR Izv.* 18 (1982), 185–194.
- [35] SIBONY, N. Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbf{P}^k$ . In: *Panor. Synthèses* 8, 97–185. Soc. Math. France, 1999.

(Reçu le 18 janvier 2002)

Stéphane Lamy

Université Lyon 1  
Institut Girard Desargues  
21 Avenue Claude Bernard  
F-69622 Villeurbanne Cedex  
France  
*e-mail*: lamy@igd.univ-lyon1.fr

**Vide-leer-empty**