

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## THE HILBERT METRIC AND GROMOV HYPERBOLICITY

by Anders KARLSSON<sup>1)</sup> and Guennadi A. NOSKOV<sup>2)</sup>

ABSTRACT. We give some sufficient conditions for Hilbert's metric on convex domains  $D$  to be Gromov hyperbolic. The conditions involve an intersecting chords property, which we in turn relate to the Menger curvature of triples of boundary points and, in the case the boundary is smooth, to differential geometric curvature of  $\partial D$ . In particular, the intersecting chords property and hence Gromov hyperbolicity is established for bounded, convex  $C^2$ -domains in  $\mathbf{R}^n$  with non-zero curvature.

We also give some necessary conditions for hyperbolicity: the boundary must be of class  $C^1$  and may not contain a line segment. Furthermore we prove a statement about the asymptotic geometry of the Hilbert metric on arbitrary convex (i.e. not necessarily strictly convex) bounded domains, with an application to maps which do not increase Hilbert distance.

### INTRODUCTION

Let  $D$  be a bounded convex domain in  $\mathbf{R}^n$  and let  $h$  be the Hilbert metric, which is defined as follows. For any distinct points  $x, y \in D$ , let  $x'$  and  $y'$  be the intersections of the line through  $x$  and  $y$  with  $\partial D$  closest to  $x$  and  $y$  respectively. Then

$$h(x, y) = \log \frac{yx' \cdot xy'}{xx' \cdot yy'}$$

where  $zw$  denotes the Euclidean distance  $\|z - w\|$  between two points. The expression  $\frac{yx' \cdot xy'}{xx' \cdot yy'}$  is called the *cross-ratio* of four collinear points and is invariant under projective transformations. For the basic properties of the distance  $h$  we refer to [Bu55] or [dIH93].

<sup>1)</sup> Supported by SFB 343 of the Universität Bielefeld.

<sup>2)</sup> Supported by SFB 343 of the Universität Bielefeld and GIF-grant G-454-213.06/95.