2. Algèbres non ramifiées via la réduction d'indice

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

différente de 2, ceci résulte immédiatement du critère d'Albert (Proposition 1). En général, on écrit la condition pour qu'il existe une extension $L = K(\alpha)$ de degré p qui déploie simultanément A et B. Soit $A = k \oplus V_A$, resp. $B = k \oplus V_B$, une décomposition de A, resp. B, comme espace vectoriel sur k.

Pour trouver α, il suffit de trouver $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, non nuls, tels que le polynôme caractéristique (de degré p) de $v_1 \in A$ coïncide avec celui de $v_2 \in B$.

Ceci correspond à un système de formes homogènes sur $V_1 \oplus V_2$. Pour $p = 2$, on trouve une forme quadratique en 6 variables. Pour $p = 3$, on trouve un système formé d'une forme quadratique et d'une forme cubique, en 16 variables. On a $6 > 2^2$ et $16 > 2^2 + 3^2$; le corps K étant C_2', le système a donc une solution non triviale.

REMARQUE. La proposition ci-dessus est énoncée par Artin et Harris ([A], Thm. 6.2), Artin et Tate ([A], Appendix), Merkur′ev et Suslin ([MS], (16.4) et (16.8)), Yanchevskiĭ, Platonov). Notons que ce qui est appelé C_2 dans [A] est ici appelé C_2'. Comme me l'a fait observer O. Gabber, la démonstration du théorème de l'appendice de [A] (p. 208) et celle donnée dans [MS], qui considèrent le système d'équations homogènes correspondant à A, B (plutôt que V_1, V_2 comme ci-dessus), requièrent une précision : les scalaires de K sont alors solutions du système d'équations homogènes considéré, et ce ne sont pas des solutions intéressantes.

2. Algèbres non ramifiées via la réduction d'indice

Pour construire des exemples d'algèbres non ramifiées pour lesquelles exposant et indice diffèrent, j'utilise le calcul de « réduction d'indice » dû à Schofield et van den Bergh ([B], [SvdB]). La question générale, étudiée par la suite par Merkur′ev, Panin, Wadsworth (voir [M2], [M3], [L2]), est d'étudier le comportement de l'indice d'une algèbre simple centrale A sur un corps k par passage au corps des fonctions $K = k(X)$ d'une k-variété projective X qui est un espace homogène d'un groupe linéaire connexe (exemples : variétés de Severi-Brauer, quadriques de dimension au moins un).

THÉORÈME 8 (Schofield et van den Bergh, 1985). *Soient k un corps et A et B deux k-algèbres simples centrales à division. Soit X la k-variété de Severi-Brauer associée à B. L'indice de $A_{k(X)}$ sur le corps des fonctions $k(X)$ est égal au plus petit des indices des k-algèbres $A \otimes_k B^{\otimes n}$, pour n parcourant les entiers.*

Ce résultat est obtenu par un calcul à la Quillen de la K-théorie des O_X-modules cohérents sur X équipés d'une action de A. Le cas particulier suivant, qui est aussi un cas particulier d'un résultat de Merkur′ev [M2], suffit pour établir le résultat de Kresch. Tignol en a donné une démonstration «élémentaire» ([T2], voir aussi [M3]).

THÉORÈME 9. *Soient k un corps de caractéristique différente de 2, C/k une conique lisse sans point rationnel, B/k l'algèbre de quaternions associée, A/k une k-algèbre simple centrale à division. Soit $i(A)$ l'indice de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'algèbre $A_{k(C)}$ n'est pas un corps gauche.*

(ii) *Il existe une k-algèbre simple centrale E/k d'indice $i(A)/2$ telle que $A \simeq B \otimes E$.*

Nous sommes maintenant à pied d'œuvre pour établir le

THÉORÈME 10. *Soit X une surface connexe, projective et lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et soit l premier, $l \neq p$. Supposons que le rang ρ du groupe de Néron-Severi de X est strictement plus petit que la dimension $b_{2,l}$ du second groupe de cohomologie l-adique $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{Q}_l)$. Supposons $l = 2$ ou $l = 3$.* *)

a) *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une variété Y_n connexe, projective et lisse sur k, qui est un schéma de Severi-Brauer sur X, de dimension relative $l^n - 1$, sur laquelle il existe, pour tout entier $m \geq 1$, une algèbre d'Azumaya $A_{n,m}$, dont la restriction au point générique de Y_n est un corps gauche d'exposant l^m et d'indice l^{n+m}.*

b) *Pour $m \geq 2$, ce corps gauche est indécomposable.*

---

*) Cette restriction est inutile. En effet, dans la démonstration du théorème, on peut remplacer la référence à la proposition 7 par le résultat récent de A. J. de Jong : pour l premier, $l \neq p$, indice et exposant des algèbres centrales simples l-primaires sur le corps des fonctions $k(X)$ de la surface X coïncident.

c) *Pour* $m = 1$, $l = 2$ *et* $n = 1$, *ce corps gauche est un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions.*

Démonstration. Le sous-groupe de torsion l-primaire $\mathrm{Br}(X)\{l\}$ de $\mathrm{Br}(X)$ est une extension d'un groupe fini l-primaire par le groupe divisible non trivial $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho}$ ([GB], II, §3) (on fixe l et note $b_2 = b_{2,l}$). Soit $\gamma_n \in (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_2-\rho} \subset \mathrm{Br}(X)$, $n \in \mathbf{N}$, une suite d'éléments, avec γ_n d'exposant l^n et $l\gamma_{n+1} = \gamma_n$.

La fibre de γ_n au point générique de la surface X est une classe d'exposant l^n sur le corps des fonctions $k(X)$, qui est un corps C_2'. Puisque l'on a $l = 2$ ou $l = 3$, la proposition 7 implique que cette classe est représentée par un corps gauche d'indice l^n sur le corps $k(X)$. Comme X est une surface régulière et que la classe de ce corps gauche dans $\mathrm{Br}(k(X))$ est dans l'image du groupe de Brauer de X, un argument de Auslander-Goldman et Grothendieck ([GB], II, §2, Corollaire 2.2) montre que ce corps gauche est la restriction d'une algèbre d'Azumaya sur X. A cette algèbre d'Azumaya on associe un schéma de Severi-Brauer $Y_n \to X$ ([GB], I, §8), de dimension relative $l^n - 1$ sur X. On sait (Châtelet, Amitsur) que le noyau de l'application de restriction $\mathrm{Br}(k(X)) \to \mathrm{Br}(k(Y_n))$ est engendré par la classe de l'image de γ_n dans $\mathrm{Br}(k(X))$. Les applications de restriction $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k(X))$ et $\mathrm{Br}(Y_n) \to \mathrm{Br}(k(Y_n))$ sont injectives, puisque X et Y_n sont lisses. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/l^n \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_n),$$

où la flèche $\mathbf{Z}/l^n \to \mathrm{Br}(X)$ envoie 1 sur γ_n. (En analysant la suite spectrale de Leray pour le faisceau étale $\mathbf{G}_m$ et la projection $Y_n \to X$, on obtient cette suite exacte directement, ainsi que l'information, non utilisée dans la suite, que la flèche $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_n)$ est surjective.)

Soit $m \geq 1$. L'image de γ_{m+n} dans $\mathrm{Br}(Y_n) \subset \mathrm{Br}(k(Y_n))$ est un élément d'exposant l^m. Soit par ailleurs $A_{n,m}$, notée simplement A, une algèbre à division représentant γ_{m+n} sur $k(X)$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, cette algèbre est d'indice l^{n+m}, et elle est la restriction au point générique d'une algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ sur X. Le théorème de Schofield et van den Bergh (Théorème 8) assure que l'indice de A étendue au corps $k(Y_n)$ est le plus petit des indices des algèbres $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ sur le corps $k(X)$ (pour r entier), où B est une $k(X)$-algèbre représentant γ_n au point générique de X. La classe de B est égale à celle de $A^{\otimes l^m}$, celle de $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ est égale à celle de $A^{\otimes 1+rl^m}$. Comme $1 + rl^m$ est premier à l'indice de A (qui est une puissance de l, en fait l^{n+m}), tous les indices des algèbres $A \otimes_{k(X)} B^{\otimes r}$ sont égaux à celui de A sur le corps $k(X)$. Puisque l'on a $l = 2$ ou $l = 3$, la proposition 7 assure que cet indice est l^{n+m}. L'indice de $A_{k(Y_n)}$ est donc l^{n+m}.

En conclusion, l'indice de γ_{n+m} sur $k(Y_n)$ est l^{n+m}, et son exposant est l^m. Par ailleurs $A_{k(Y_n)}$ est la restriction au point générique de Y_n de l'algèbre d'Azumaya $\mathcal{A} \times_X Y_n$. L'assertion a) est établie.

Montrons b). L'argument est celui du théorème 2.2 de [SvdB]. Soit $m \geq 2$. L'algèbre $A_{k(Y_n)}$ est d'indice l^{n+m}. L'algèbre $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est d'indice l^{n+m-1}. Supposons $A_{k(Y_n)}$ décomposable, *i.e.* supposons que le corps gauche sous-jacent soit isomorphe à un produit tensoriel de deux corps gauches E et F d'indice strictement plus petit, soit l^a et l^b avec $a + b = n + m$. L'algèbre $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est alors semblable au produit tensoriel de $E^{\otimes l}$ avec $F^{\otimes l}$, et son indice divise le produit des indices de $E^{\otimes l}$ et $F^{\otimes l}$. Mais l'indice de $E^{\otimes l}$ (resp. de $F^{\otimes l}$) divise strictement celui de E (resp. de F) (c'est une propriété générale, voir [Al2], Lemma 7, p. 76, [A] (5.4), p. 204 ou [KMRT] (10.5), p. 116). Ainsi l'indice de $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ divise $l^{a-1} \cdot l^{b-1} = l^{n+m-2}$, ce qui est absurde. Donc $A_{k(Y_n)}^{\otimes l}$ est indécomposable.

L'assertion c) de l'énoncé est un cas particulier d'un théorème d'Albert ([Al2], chap. XI, Thm. 2, p. 174).

REMARQUE 1. En caractéristique zéro, les nombres de Betti l-adiques $b_{i,l}$ sont égaux aux nombres de Betti topologiques b_i ; par ailleurs, après réduction au cas où $k = \mathbf{C}$, la théorie de Hodge dit que la condition $b_2 - \rho > 0$ équivaut à la non annulation du groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, O_X)$, soit encore à la non annulation du groupe $H^0(X, \Omega^2_X)$, c'est-à-dire à l'existence d'une différentielle holomorphe de degré 2 non triviale. La classification des surfaces algébriques nous fournit de nombreux exemples de surfaces satisfaisant ces propriétés. Il en est ainsi par exemple du produit de deux courbes elliptiques, mais aussi de toute surface projective et lisse dans l'espace projectif $\mathbf{P}^3$ de degré au moins égal à 4.

REMARQUE 2. Une partie de la démonstration donnée ci-dessus s'étend à d'autres cadres. Si l'on veut par exemple, sur un corps K, simplement construire des algèbres simples centrales d'exposant divisant strictement l'indice, il suffit de disposer d'un corps k et d'une k-algèbre simple centrale d'exposant l^r avec $r \geq 2$. Alors l'algèbre $B = A^{\otimes l}$ est d'indice strictement plus petit que celui de A (par le résultat rappelé ci-dessus). Soit Y la k-variété de Severi-Brauer attachée au corps gauche sous-jacent à B et soit $K = k(Y)$ son corps des fonctions. Le théorème de Schofield et van den Bergh montre que l'indice de A_K est égal à celui de A, soit $l^r \geq l^2$. Mais l'exposant de A_K

est égal à l. Le cas le plus simple est celui où k est un corps de nombres arbitraire, on trouve un exemple avec une algèbre d'exposant 2 et d'indice 4 sur le corps des fonctions d'une conique définie sur k.

Si l'on veut fabriquer des exemples dans une tour infinie, comme dans le théorème, il suffit de considérer un corps k, de caractéristique différente de l et dont le groupe de Brauer contient un exemplaire de $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$. C'est le cas pour les corps locaux non archimédiens, et pour les corps de nombres. D'après le théorème de Merkur′ev-Suslin [MS], c'est le cas pour tout corps qui contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de l, et qui possède au moins un élément non trivial d'ordre l dans son groupe de Brauer. On trouvera dans Merkur′ev [M1] des conditions nettement plus faibles assurant l'existence d'un tel sous-groupe.

Pour les corps de nombres, pour toute algèbre simple centrale, l'exposant est égal à l'indice, on peut donc recopier entièrement le théorème ci-dessus, avec $X = \mathrm{Spec}(k)$ à la place de la surface complexe X, et avec l premier quelconque.

3. Algèbres non ramifiées sur les produits de courbes

Au paragraphe 1, on a donné des exemples de corps gauches provenant par diverses constructions (produit de variétés, cup-produit de classes de cohomologie, somme dans le groupe de Brauer) d'une classe fondamentale, la classe de $x \in \mathbf{C}(x)^*/\mathbf{C}(x)^{*n} = H^1_{\text{ét}}(\mathbf{C}(x), \mathbf{Z}/n)$, qui est une classe de cohomologie (nécessairement) ramifiée sur le corps des fractions de la droite projective sur le corps des complexes. Sur une courbe elliptique E sur $\mathbf{C}$, on dispose de classes non ramifiées dans $H^1_{\text{ét}}(E, \mathbf{Z}/n) \subset H^1(\mathbf{C}(E), \mathbf{Z}/n) \simeq \mathbf{C}(E)^*/\mathbf{C}(E)^{*n}$. Des constructions analogues vont ici donner des classes de cohomologie non ramifiées, des classes d'algèbres simples centrales non ramifiées. Mais il n'est pas clair que ces classes sont non triviales.

Question 1. Soit l un nombre premier. Soient $E_1, \ldots, E_m$ des courbes elliptiques sur le corps $\mathbf{C}$. Pour $i = 1, \ldots, m$, soit g_i une classe non triviale dans $H^1_{\text{ét}}(E_i, \mathbf{Z}/l) \hookrightarrow \mathbf{C}(E_i)^*/\mathbf{C}(E_i)^{*l}$. Sur le corps des fractions du produit $X = E_1 \times \cdots \times E_m$, la restriction du cup-produit $g_1 \cup \cdots \cup g_m \in H^m_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/l)$ est-elle non triviale ?

Une question a priori plus faible (mais équivalente pour $m = 2$, par le théorème de Merkur′ev-Suslin, et conjecturalement équivalente pour tout m)