9. Autres résultats

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **48 (2002)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

solutions des équations superelliptiques $f(x) = ay^m$ sont très élevées, et, sauf dans certains cas bien particuliers *ad hoc*, l'ordinateur ne peut les résoudre dès que, disons, $m \times \deg(f)$ excède 20. Cependant, dans les deux exemples qui nous intéressent, le polynôme f est cyclotomique et possède ainsi de nombreuses propriétés que l'on peut exploiter, pourvu que p soit différent de q et que q ne divise pas le nombre de classes relatif du p-ième corps cyclotomique. Cette méthode, dont l'origine remonte à des travaux de Bilu [6] et Bilu et Hanrot [7], et qui a également été utilisée avec succès dans le cadre de l'équation de Catalan [13], permet de majorer x par une borne de l'ordre de $p^q q^{pq}$, et il suffit alors d'une simple énumération pour achever la résolution des équations (10).

Par ailleurs, un résultat classique de la théorie des équations diophantiennes exponentielles affirme que, pour les équations (10), on sait majorer q en fonction de p. Les bornes reposent entre autres sur des minorations de formes linéaires en ≥ 3 logarithmes, et sont de ce fait très élevées : supérieures à $(3p)^{10p}$ si l'on applique les meilleures estimations actuelles [8]. Or, grâce aux propriétés des polynômes cyclotomiques, il s'avère en fait possible de ne faire appel qu'à des formes linéaires en deux logarithmes pour borner q en fonction de p dans les équations (10) : on obtient alors par exemple $q \leq 5521$ pour $p = 5$, et $q \leq 9000p^2 \log^4 p$ pour tout p premier. Il ne reste alors plus qu'un nombre raisonnable de couples $(5, q)$ à traiter, pour lesquels on applique la méthode décrite dans le précédent paragraphe... si toutefois p n'est pas égal à q ! Dans le cas contraire, on se voit contraint d'utiliser les techniques développées par Bilu et Hanrot [7] et, malgré de multiples astuces de programmation, les capacités actuelles des ordinateurs ne nous permettent pas de résoudre (10) dès que $p = q \geq 17$.

9. Autres résultats

On désigne par $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de l'entier rationnel $n \geq 2$. Shorey [44, 45] a démontré des versions plus faibles des Théorèmes 8 et 9 (sa conclusion est la finitude du nombre de solutions et non la résolution complète), desquelles il a déduit de nouvelles informations relatives à (1). En examinant ses démonstrations, il s'avère que, grâce aux Théorèmes 8 et 9, on peut maintenant démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 15. *Si l'équation* (1) *a une solution* (x, y, n, q) *avec* $n \geq 5$, *alors* $\omega(n) \leq q - 2$. *Si, de plus, on suppose* $(n, Q_n) = 1$, *alors* $\omega(n) = 1$ *si* $q = 5$ *et* $2^{\omega(n)} \leq q - 1$ *sinon. D'autre part, si* q *divise* n, *alors* n *est une puissance de* q.

On en déduit immédiatement que si (1) possède une solution vérifiant $q = 3$, alors n est une puissance d'un nombre premier au moins égal à 5.

Dans les parties 5 et 6, on a résolu l'équation (1) dans le cas où x est un carré ou la puissance de certains entiers fixés. Hirata-Kohno et Shorey [24] ont complété ces informations en s'intéressant à (1) sous l'hypothèse additionnelle que x est une puissance μ-ième.

THÉORÈME 16. *Soit* $\mu \geq 3$ *un nombre premier. Alors l'équation* (1) *n'a qu'un nombre fini de solutions* (x, y, n, q) *vérifiant*

$$q > 2(\mu - 1)(2\mu - 3)$$

et $x = z^\mu$ *pour un entier* $z > 1$. *En outre, pour de telles solutions,* x^n *est majoré par une constante effectivement calculable ne dépendant que de* μ.

Il découle du Théorème 16 et du Théorème 9 que (1) ne possède qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) telles que x est un cube et $q \notin \{5, 7, 11\}$, et l'on est naturellement amené à poser le problème suivant.

PROBLÈME 2. Montrer que l'équation

$$\frac{(z^3)^n - 1}{z^3 - 1} = y^5 \quad .$$

n'admet qu'un nombre fini de solutions (z, y, n), où z, y et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 3.

Aussi étonnant que cela puisse paraître, aucune technique actuellement connue ne semble en mesure de résoudre le Problème 2.