Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 48 (2002)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DE NAGELL-LJUNGGREN $\frac{x^n – 1}{x – 1} = y^q$
Autor: Bugeaud, Yann / MIGNOTTE, Maurice
Kapitel: 12. Applications
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66071

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

11. Le cas $x < 0$

Les résultats de Nagell et Ljunggren mentionnés au paragraphe 2 sont plus généraux que le Théorème 1, car ils incluent la résolution de (1) pour $x < 0$. Comme il est expliqué dans [18], ce problème revient à résoudre l'équation

$$\frac{x^n + 1}{x + 1} = y^q, \quad \text{en entiers } x > 1,\ y > 1,\ n \geq 3 \text{ impair},\ q \geq 2\,, \tag{12}$$

qui possède la solution $(x, y, n, q) = (19, 7, 3, 3)$. Il s'agit d'ailleurs de l'unique solution avec $n = 3$ ou 4 [36, 37, 31]. Il est tentant de conjecturer qu'il s'agit là de l'unique solution de (12), mais nous sommes loin de pouvoir le démontrer. Cependant, nous avons plusieurs résultats partiels, qui vont dans le sens de cette conjecture.

Les méthodes utilisées lors de l'étude de l'équation (1) s'appliquent également à (12), et permettent de démontrer les résultats suivants. En outre, de nouvelles estimations [11] ont permis de considérablement réduire le temps de calcul [18].

Théorème 18. *Si l'équation (12) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p - 1$. En particulier, on a $x \geq 2q + 1$. L'équation (12) n'a pas de solution (x, y, n, q) avec $2 \leq x \leq 10^4$ et $n \geq 5$.*

Le cas particulier $x = 2$ est traité dans [12], l'équation correspondante intervenant dans la classification des groupes finis simples.

12. Applications

La question suivante apparaît en théorie des groupes finis et est fortement liée à l'équation (1): trouver des nombres premiers P et Q et des entiers rationnels $n \geq 3$ et $a \geq 1$ tels que

$$\frac{Q^n - 1}{Q - 1} = P^a\,.$$

Plusieurs travaux y font référence, notamment [12, 23, 29, 49] et [40, page 121]. Observons que l'équation (12) possède également des liens avec la théorie des groupes finis [12].

Une autre application concerne l'irrationalité de nombres réels dont le développement décimal est de la forme suivante. Soient $g \geq 2$ et $h \geq 2$ des

entiers. Pour tout entier $m \geq 1$, on définit $(m)_h = a_1 \ldots a_r$ la suite des chiffres de m dans son écriture en base h, i.e. $m = a_1 h^{r-1} + \ldots + a_r$, avec $a_1 > 0$ et $0 \leq a_i < h$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour une suite $(n_i)_{i \geq 1}$ d'entiers positifs ou nuls, on pose

$$a_h(g) = 0.(g^{n_1})_h (g^{n_2})_h \ldots$$

Il est établi que $a_h(g)$ est irrationnel si la suite $(n_i)_{i \geq 1}$ est non bornée (voir par exemple [41]), et Sander [41] a étudié le cas où cette suite est bornée et admet exactement deux éléments qui apparaissent une infinité de fois. Son Theorem 3 repose sur une application incorrecte d'un résultat de [47] et n'est à ce jour pas démontré. Cependant, comme il est expliqué par exemple dans [19], les Théorèmes 12 et 13 permettent de montrer l'irrationalité de nombres $a_h(g)$ sous les hypothèses considérées par Sander.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER, A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. *Mathematika 12* (1966), 204–216.

[2] —— A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms I–III. *Acta Arith. 21* (1972), 117–129; *24* (1973), 33–36; *27* (1975), 247–252.

[3] BAKER, A. and G. WÜSTHOLZ. Logarithmic forms and group varieties. *J. reine angew. Math. 442* (1993), 19–62.

[4] BENNETT, M. Rational approximation to algebraic number of small height: The diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *J. reine angew. Math. 535* (2001), 1–49.

[5] BENNETT, M. and B.M.M. DE WEGER. On the Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *Math. Comp. 67* (1998), 413–438.

[6] BILU, Y. Solving superelliptic Diophantine equations by the method of Gelfond–Baker. Preprint 94–09, Mathématiques Stochastiques, Univ. Bordeaux 2 (1994).

[7] BILU, Y. and G. HANROT. Solving superelliptic Diophantine equations by Baker's method. *Compositio Math. 112* (1998), 273–312.

[8] BUGEAUD, Y. Sur la distance entre deux puissances pures. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322* (1996), 1119–1121.

[9] —— Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 127* (1999), 373–381.

[10] —— On the Diophantine equation $a\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Proceedings of the Number Theory Conference held in Turku*, ed. M. Jutila and T. Metsänkylä, 19–24. De Gruyter, 2001.

[11] —— Linear forms in two p-adic logarithms and applications to Diophantine problems. *Compositio Math.* (à paraître).