

## 1.2 Points critiques incidents, liés et libres

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Remplaçons le générateur  $\Xi_{p_0}^{k-1}$  par  $\tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} := \Xi_{p_0}^{k-1} + \frac{1}{\alpha_{p_0}} \sum_{p_0 > p \in P} \alpha_p \Xi_p^{k-1}$ , qui est encore de la forme (1), car  $\partial \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1} = \partial \Xi_{p_0}^{k-1} = 0$ . L'égalité (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{\alpha_{p_0}} \partial \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right) = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1};$$

ainsi le générateur

$$\Xi_{j+1}^k := \frac{1}{\alpha_{p_0}} \left( \xi_{j+1}^k - \sum_{q \in Q} \alpha_{q^*} \Xi_{q^*}^k \right)$$

vérifie  $\partial \Xi_{j+1}^k = \tilde{\Xi}_{p_0}^{k-1}$ .  $\square$

#### REMARQUES.

(1) Tout complexe (avec générateurs ordonnés) admet une forme canonique. De plus, cette forme est uniquement déterminée par le complexe initial (voir [Bar]).

(2) Sur les espaces  $M_k^f$  on peut définir un autre opérateur de bord  $\delta: M_k^f \rightarrow M_{k-1}^f$  par la formule

$$\delta \xi_\ell^k := \sum_m \beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1}) \xi_m^{k-1},$$

où  $\beta(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  est le nombre (algébrique) de trajectoires intégrales du champ de vecteurs  $Y := -\nabla f / |\nabla f|^2$  de  $\xi_\ell^k$  à  $\xi_m^{k-1}$ . Puisque l'attachement des cellules  $\sigma_\ell^k$  est induit par la rétraction des espaces  $E^\lambda$  le long des trajectoires intégrales de  $Y$ , on a  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  si et seulement s'il existe (au moins) une trajectoire de  $Y$  entre les deux points critiques correspondants. Ainsi, d'après le remarque précédent, les complexes  $(M_*^f, \partial_*)$  et  $(M_*^f, \delta_*)$  ont la même forme canonique.

## 1.2 POINTS CRITIQUES INCIDENTS, LIÉS ET LIBRES

Soit  $(M_*^f, \partial_*)$  le complexe de Morse en forme canonique d'une fonction de Morse excellente  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$ . A chaque point critique  $\xi_\ell^k$  correspond le générateur  $\Xi_\ell^k$ , c'est-à-dire

$$\Xi_\ell^k = \sum_{j \leq \ell} \alpha_j \xi_j^k, \quad \text{avec } \alpha_\ell \neq 0.$$

**DÉFINITION.** On dit que deux points critiques  $\xi_\ell^k$  et  $\xi_m^{k-1}$  de  $f$  sont *incidents* si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$ , *liés* si  $\partial \Xi_\ell^k = \Xi_m^{k-1}$ . Un point critique est *libre* s'il n'est lié à aucun point critique.

DÉFINITION. On appelle *diagramme (du complexe) de Morse* la représentation suivante du complexe de Morse de  $f$ . On considère  $K + 1$  axes réels verticaux (avec la même échelle et l'origine à la même hauteur), numérotés, de gauche à droite, de  $K$  à  $0$ . Sur le  $i$ -ème axe on considère les points critiques de  $f$  d'indice  $i$ , disposés selon leur valeur critique. On joint par un segment en tirets les couples de points critiques incidents, par un segment continu les couples de points critiques liés (cf. Figure 1).

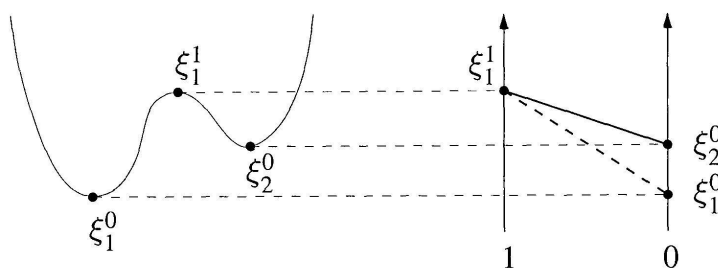


FIGURE 1

Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto \xi^4 - \xi^2 + \xi$

REMARQUES. Considérons un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ .

(1) Les segments qui ont  $\xi_\ell^k$  comme extrémité sont tous du même côté de l'axe où se trouve  $\xi_\ell^k$ , car  $\partial^2 = 0$ .

(2) Les segments (orientés du point d'indice plus grand vers celui d'indice plus petit) ont tous pente négative, car si  $[\xi_\ell^k : \xi_m^{k-1}] \neq 0$  alors  $f(\xi_\ell^k) > f(\xi_m^{k-1})$ .

(3) Un point critique peut être une extrémité de plusieurs segments en tirets, mais d'un seul segment continu (au plus).

PROPOSITION 1.3. Soit  $(\xi_\ell^k, \xi_m^{k-1})$  un couple de points critiques liés. Alors  $\xi_m^{k-1}$  est le point critique de valeur critique maximale parmi les points critiques incidents à  $\xi_\ell^k$  tels que  $[\xi_j^k : \xi_m^{k-1}] = 0$  pour tout  $j < \ell$ ;  $\xi_\ell^k$  est le point critique de valeur critique minimale parmi les points critiques incidents à  $\xi_m^{k-1}$  tels que  $[\xi_\ell^k : \xi_j^{k-1}] = 0$  pour tout  $j > m$ .

PROPOSITION 1.4. Un point critique  $\xi$  est libre si et seulement si pour tout point critique  $\eta$  incident à  $\xi$ , il existe un point critique  $\xi'$ , incident à  $\eta$ , tel que

$$|f(\xi') - f(\eta)| < |f(\xi) - f(\eta)|.$$

Les deux propositions sont une conséquence immédiate du choix de l'indice  $p_0$  dans la preuve du lemme algébrique.

PROPOSITION 1.5. *Deux points critiques de  $f$  liés le sont aussi en tant que points critiques de  $-f$ .*

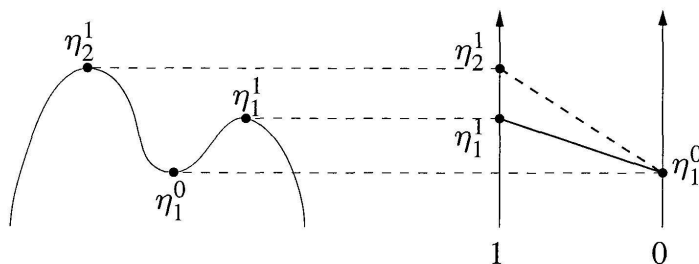


FIGURE 2

Diagrammes de Morse de  $\xi \mapsto -(\xi^4 - \xi^2 + \xi)$

*Démonstration.* Un point critique  $\xi_\ell^k$  de  $f$ , d'indice  $k$ , est un point critique de  $-f$ , d'indice  $K - k$ . Soit  $c := f(\xi_\ell^k)$ ; d'après le Théorème 1.2 on a

$$E_f^{c+\epsilon} \simeq E_f^{c-\epsilon} \cup \sigma_\ell^k, \quad E_{-f}^{-c+\epsilon} \simeq E_{-f}^{-c-\epsilon} \cup \tau_m^{K-k}.$$

Or, puisque  $\partial\sigma_\ell^k$  et  $\partial\tau_m^{K-k+1}$  sont enchaînées, on a  $[\sigma_j^i, \sigma_h^{i-1}] = \pm[\tau_h^{K-i+1}, \tau_j^{K-i}]$  (voir [DNF], vol. III, § 18). Il s'ensuit que les complexes de Morse de  $f$  et de  $-f$  ont les mêmes couples de points critiques incidents. Puisque l'on obtient le complexe de  $-f$  de celui de  $f$  par une symétrie qui ne change pas la pente des segments (cf. Figure 2), la proposition précédente entraîne que les couples de points critiques liés sont les mêmes.  $\square$

### 1.3 LE NIVEAU CRITIQUE DE MINIMAX

Soit maintenant  $f: E = \mathbf{R}^K \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , quadratique à l'infini, c'est-à-dire  $f(\xi) = Q_\infty(\xi)$  pour  $|\xi|$  assez grand, où  $Q_\infty$  est une forme quadratique non dégénérée d'indice  $k_\infty$ . On ne suppose pas nécessairement que  $f$  soit de Morse excellente. Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  considérons la famille d'inclusions naturelles  $i_\lambda: E^\lambda \hookrightarrow E$ , qui induit les homomorphismes  $i_\lambda^*: \tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \rightarrow \tilde{H}_*(E^\lambda, E^{-\infty})$  des groupes d'homologie relative réduite à valeurs en  $\mathbf{Q}$ .

Comme  $f$  est quadratique à l'infini, on a

$$\tilde{H}_*(E, E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(E/E^{-\infty}) \simeq \tilde{H}_*(\mathbf{S}^{k_\infty}).$$

Soit  $\Gamma$  un générateur de  $\tilde{H}_{k_\infty}(E, E^{-\infty}) \simeq \mathbf{Q}$ .