Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 49 (2003)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV

Autor: CANTAT, Serge

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66688

NOTE DES ÉDITEURS

L'article qui précède a été rédigé en 1976 et a circulé sous la forme d'une prépublication de SUNY, dès 1977. Nous l'avons imprimé ici en l'état, à l'exception de la dernière remarque du § 4, de l'adjonction de trois références et de la correction d'un petit nombre de fautes de frappe. Serge Cantat, que nous remercions, a bien voulu rédiger à cette occasion un court texte pour orienter le lecteur vers quelques-uns des nombreux travaux influencés par l'article de Mikhaïl Gromov.

NOTES SUR L'ARTICLE DE M. GROMOV

par Serge CANTAT

0.1. L'article de M. Gromov a considérablement influencé les travaux sur la conjecture de Shub (reliant entropie topologique et action sur l'homologie) ainsi que l'étude des systèmes dynamiques holomorphes, notamment en ce qui concerne la dynamique à plusieurs variables.

Le texte [14] propose une preuve alternative des résultats principaux obtenus par M. Gromov. Ceux de Shmuel Friedland ([6], [7] et [8]) proposent diverses extensions de ces résultats au cadre des transformations méromorphes des variétés kählériennes (voir [5]).

Les deux pages qui suivent ne concernent que la dynamique holomorphe. Il convient toutefois de noter les articles suivants, qui sont liés à d'autres aspects de l'article de Gromov et contiennent de nombreuses références : [15] et plus généralement l'ensemble des travaux de S. Newhouse sur le sujet, ainsi que [1], qui s'inscrit dans la lignée des travaux d'Artin et Mazur, de Gromov et de Yomdin.

0.2. Bien souvent, on couple les résultats obtenus par M. Gromov à ceux de Y. Yomdin (voir [10], [19]) et de S. Newhouse (voir [15]). Le théorème suivant est un exemple typique.

THÉORÈME 0.1 (Gromov, Yomdin). *Soit M une variété complexe compacte kählérienne et $f \colon M \to M$ une transformation holomorphe de M. Si $\lambda(f)$ désigne le rayon spectral de l'action de f sur la cohomologie de M, alors*

$$h(f) = \log(\lambda(f)).$$

REMARQUE 1. Lorsque M est l'espace projectif $\mathbf{P}^m$, la transformation f est donné par $m+1$ polynômes homogènes de même degré d. L'action de f sur chaque groupe de cohomologie $\mathrm{H}^k(M, \mathbf{Z})$ est la multiplication par d^k. Le rayon spectral $\lambda(f)$ est donc égal au degré topologique $\deg(f) = d^m$ et

$$h(f) = \log(\deg(f)).$$

REMARQUE 2. Le théorème précédent peut être affiné : comme le montre l'article de M. Gromov, il suffit de regarder l'action de f sur les classes de Kähler de M, donc sur les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^{k,k}(M, \mathbf{R})$. En particulier, seule compte la cohomologie de dimension paire pour évaluer $\lambda(f)$. De manière analogue, les variétés stables et instables locales de f sont des sous-variétés complexes de M ; si l'on peut associer une classe d'homologie asymptotique à une variété instable, celle-ci vit dans un groupe du type $\mathrm{H}_{k,k}(M, \mathbf{R})$ (voir [16], [18]).

Ce point de vue est largement utilisé dans [2], dans [4] et [13], ainsi que dans [3] et [11]. Il apparaît aussi dans [6], mais le lemme 3 de cet article est illusoire ; cependant, T. C. Dinh et N. Sibony ont trouvé récemment comment adapter les arguments de M. Gromov dans le contexte des transformations méromorphes des variétés kählériennes (voir [5]).

0.3. Dans [9] et [17], un résultat analogue au théorème 0.1 est démontré pour les automorphismes polynomiaux du plan affine $\mathbf{C}^2$. La démarche est proche de celle présentée par M. Gromov au paragraphe 4 de son article : le théorème de Bézout y joue un rôle similaire mais il est couplé aux travaux de A. Katok [12] et à ceux de Y. Yomdin mentionnés plus haut (l'usage du théorème de Bézout est également au cœur de [3]).

L'énoncé est le suivant. Si g est un automorphisme polynomial du plan, notons $\mathrm{algdeg}(g)$ le maximum des degrés des deux polynômes déterminant g, le degré d'un monôme $x^a y^b$ étant égal à $a+b$. La limite

$$\deg(g) = \lim_{k \to \infty} \left(\mathrm{algdeg}(g^k)^{\frac{1}{k}} \right)$$

existe et est un entier. Contrairement au degré algébrique algdeg(g), ce degré deg(g) est invariant par conjugaison: $\deg(hgh^{-1}) = \deg(g)$. Soit $H(g)$ le taux de croissance exponentiel du nombre de points périodiques de g, alors

$$h(g) = H(g) = \log(\deg(g)).$$

RÉFÉRENCES

[1] ARNOL'D, V. I. Dynamics of complexity of intersections. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 21* (1990), 1–10.

[2] BEDFORD, E., M. LYUBICH and J. SMILLIE. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math. 112* (1993), 77–125.

[3] BRIEND, J.-Y. et J. DUVAL. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbf{P}^k(\mathbf{C})$. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 93* (2001), 145–159.

[4] CANTAT, S. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Math. 187* (2001), 1–57.

[5] DINH, T.-C. et N. SIBONY. Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. Preprint Orsay, mars 2003.

[6] FRIEDLAND, S. Entropy of polynomial and rational maps. *Ann. of Math. (2) 133* (1991), 359–368.

[7] —— Entropy of rational self-maps of projective varieties. In: *Dynamical Systems and Related Topics (Nagoya, 1990)*, 128–140. Volume 9 of *Adv. Ser. Dynam. Systems*, World Sci. Publishing, River Edge (N.J.), 1991.

[8] —— Entropy of algebraic maps. In: *Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993)*, 215–228. Special Issue, 1995.

[9] FRIEDLAND, S. and J. MILNOR. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems 9* (1989), 67–99.

[10] GROMOV, M. Entropy, homology and semialgebraic geometry. In: *Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86*, 225–240. *Astérisque 145–146*, 1987.

[11] GUEDJ, V. Dynamics of rational transformations. Manuscrit, 2002.

[12] KATOK, A. Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 51* (1980), 137–173.

[13] MCMULLEN, C. T. Dynamics on $K3$ surfaces: Salem numbers and Siegel disks. *J. reine angew. Math. 545* (2002), 201–233.

[14] NEWHOUSE, S. E. Entropy and volume. *Ergodic Theory Dynam. Systems 8** (Charles Conley Memorial Issue) (1988), 283–299.

[15] —— Entropy in smooth dynamical systems. In: *Proc. Int. Congr. Math., Kyoto/Japan 1990, Vol. II*, 1285–1294, 1991.

[16] RUELLE, D. and D. SULLIVAN. Currents, flows and diffeomorphisms. *Topology 14* (1975), 319–327.

[17] SMILLIE, J. The entropy of polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. *Ergodic Theory Dynam. Systems 10* (1990), 823–827.

[18] SULLIVAN, D. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math. 36* (1976), 225–255.

[19] YOMDIN, Y. Volume growth and entropy. *Israel J. Math. 57* (1987), 285–300.

(Reçu le 3 septembre 2003)

Serge Cantat

IRMAR, UMR 6625 du CNRS
Université Rennes I
Campus de Beaulieu, Bât. 22–23
F-35042 Rennes cedex
France
e-mail: cantat@maths.univ-rennes1.fr

vide-leer-empty