3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

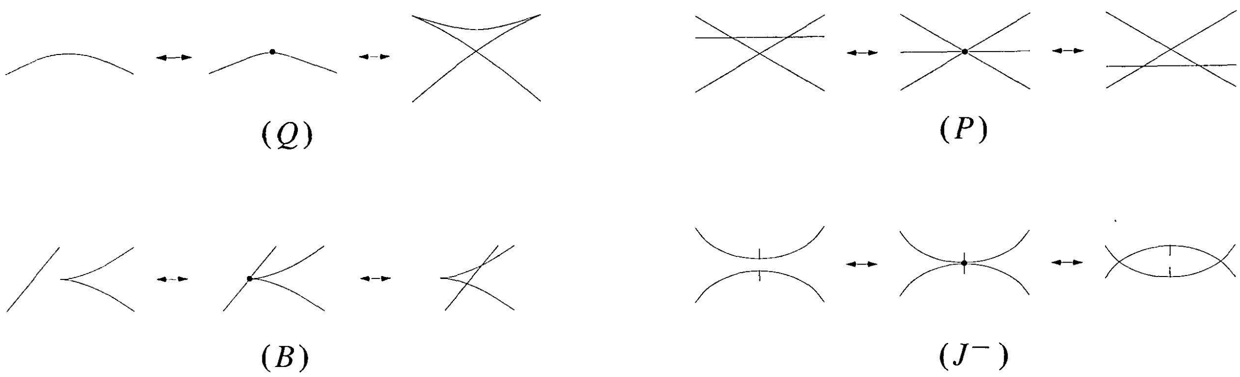

FIGURE 6

Singularités permises dans l'isotopie entre deux fronts

Le nombre de cusps d'un front, comptés avec leur signe (positif pour les cusps montants, négatif pour les cusps descendants), le *nombre de Maslov*, est invariant par isotopies legendriennes.

3.2 DÉCOMPOSITIONS ADMISSIBLES (D'APRÈS CHEKANOV ET PUSHKAR)

Dans cette section on rappelle brièvement la construction d'un nouvel invariant des nœuds legendriens, dû à Yu. Chekanov et P. Pushkar, qui permettra d'établir une caractérisation géométrique de la solution de minimax.

La projection d'un nœud legendrien de $J^1\mathbf{R}$ dans $J^0\mathbf{R}$ par π_1 est un front fermé. Soit Σ un tel front, générique.

On appelle *décomposition* de Σ des courbes $X_1, \ldots, X_n$ fermées, ayant un nombre fini d'auto-intersections, telles que pour $i \neq j$, $X_i \cap X_j$ contient un nombre fini de points, et $X_1 \cup \cdots \cup X_n = \Sigma$.

Un point double $x \in X_i \cap X_j$ de Σ est un *point de saut* si X_i et X_j ne sont pas lisses en x, *de Maslov* si le nombre de cusps (comptés avec leur signe) qui séparent le long du front les deux branches se coupant en x est 0.

DÉFINITION. Une décomposition $(X_1, \ldots, X_n)$ de Σ est *admissible* si :

(1) chaque X_i est homéomorphe au bord d'un disque : $\partial X_i = B_i$;

(2) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $q \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$B_i(q) := \{z \in \mathbf{R} \mid (q, z) \in B_i\}$$

est connexe ; en particulier si c'est un point, ce point est un cusp du front ;

(3) si $(q_0, z) \in X_i \cap X_j$ $(i \neq j)$ est un point de saut alors pour $q \neq q_0$, assez proche q_0, l'ensemble $B_i(q) \cap B_i(q)$ est soit $B_i(q)$, soit $B_j(q)$, soit vide ;

(4) les points de sauts sont tous de Maslov.

REMARQUES.

(1) Il suit des conditions (1) et (2) que chaque courbe X_i a exactement deux cusps, qui divisent la courbe en deux parties, que l'on note σ_i^+ et σ_i^- (avec la convention suivante : pour tout $(q, z_i^\pm) \in \sigma_i^\pm$ générique, on a $z_i^- < z_i^+$).

(2) La condition (3) équivaut à demander qu'aucun point de saut ne réalise l'une des *configurations interdites* montrées à la Figure 7.

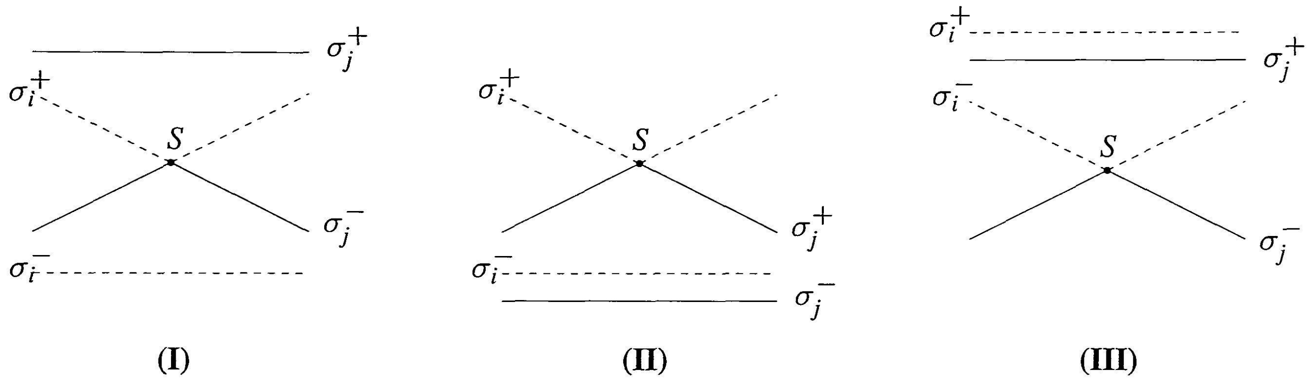

FIGURE 7
Configurations interdites autour des points de saut

Notons par $\#(\mathcal{D})$ le nombre de courbes X_i et par $\#(\mathcal{S})$ le nombre de points de saut dans une décomposition admissible $\mathcal{D}$ du front Σ.

THÉORÈME DE CHEKANOV-PUSHKAR ([Ch2], [C-P]). *Le nombre de décompositions admissibles d'un front projection d'un nœud legendrien est invariant par isotopies legendriennes du nœud; de plus, le nombre $\#(\mathcal{D}) - \#(\mathcal{S})$ est constant le long de l'isotopie.*

EXEMPLE 3.1. La Figure 8 montre deux décompositions d'un front générique, projection d'un nœud legendrien. Le front est isotope au front lèvre (le front ayant deux cusps et aucune auto-intersection), donc; d'après le théorème de Chekanov-Pushkar, la décomposition (1) est la seule admissible.

FIGURE 8