Appendix A. Proof of Lemma 4.4

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

REMARK 6.2. Z. Shahbazi has proved that if $\mathcal{G}$ is a gerbe with connection over a manifold M, with curvature 3-form η, and $\Phi\colon N \to M$ is a map with $\Phi^*\eta + d\omega = 0$, then the pull-back gerbe $\Phi^*\mathcal{G}$ admits a pseudo-line bundle, with ω as its error 2-form, if and only if the pair (η, ω) defines an integral element of the relative de Rham cohomology $H^3(\Phi, \mathbf{R})$. This means that for any smooth 2-cycle $S \subset N$, and any smooth 3-chain $B \subset M$ with boundary $\Phi(S)$, one must have $\int_B \eta - \int_S \omega \in \mathbf{Z}$. The particular case where the target of Φ is a Lie group G is relevant for the pre-quantization of group-valued moment maps [1].

APPENDIX A. PROOF OF LEMMA 4.4

In this Appendix we prove Lemma 4.4, concerning the construction of a certain cover U_I of M from a given cover V_j. Write $M = \coprod_I A_I$ where

$$A_I = \bigcap_{i \in I} V_i \setminus \bigcup_{j \notin I} V_j .$$

Notice that $\bar{A}_I \subset \bigcup_{J \subset I} A_J$. By induction on the cardinality $k = |I|$ we will construct open sets $U_J \subset V_J$, having the following properties:

(a) the closure $\bar{U}_I$ does not meet $\bar{U}_J$ for $|J| \le |I|$ unless $J \subset I$,

(b) each $\bar{A}_I$ is contained in the union of U_J with $J \subset I$.

The induction starts at $k = 0$, taking $U_\varnothing = \varnothing$. Suppose we have constructed open sets U_I with $\bar{U}_I \subset V_I$ for $|I| < k$, such that the properties (a), (b) hold for all $|I| < k$. For $|I| = k$ consider the subsets

$$B_I := A_I \setminus \Big(\bigcup_{J \subset I, |J| < k} U_J \Big) .$$

Note that (unlike A_I) the set B_I is closed. B_I does not meet $\bar{A}_J$ unless $I \subset J$, and it also does not meet $\bar{U}_J$ for $|J| < k$ unless $J \subset I$. That is, B_I is disjoint from

$$C_I := \bigcup_{J \not\subset I, |J| < k} \bar{U}_J \cup \bigcup_{K \not\supset I} \bar{A}_K .$$

Choose open sets U_I for $|I| = k$ with $B_I \subset U_I \subset \bar{U}_I \subset M \setminus C_I$, and such that the closures of the sets U_I for distinct I with $|I| = k$ are disjoint. The new collection of subsets will satisfy the properties (a), (b) for $|I| \le k$. We next show that $V_i' = M \setminus \bigcup_{J \not\ni i} \bar{U}_J$ is a cover of M. Write $M = \coprod_I D_I$ with $D_I = \bar{U}_I \setminus \bigcup_{|J| < |I|} \bar{U}_J$. Then $D_I \cap \bar{U}_J = \varnothing$ unless $I \subset J$, so D_I is contained in each V_i' with $i \in I$. In particular $\bigcup_i V_i' = M$. Finally $\overline{V_i'} \subset \bigcup_{I \ni i} \overline{U}_I \subset V_i$. This completes the proof of Lemma 4.4. Note that if the V_i were invariant under an action of a compact group G, the U_I could be taken G-invariant also.

REFERENCES

[1] ALEKSEEV, A., A. MALKIN and E. MEINRENKEN. Lie group valued moment maps. *J. Differential Geom. 48* (1998), 445–495.

[2] BEHREND, K., P. XU and B. ZHANG. Equivariant gerbes over compact simple Lie groups. Preprint, 2002.

[3] BERLINE, N., E. GETZLER and M. VERGNE. *Heat Kernels and Dirac Operators.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften *298.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[4] BOTT, R. and L. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics *82.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[5] BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie.* Chapitre IV–VI. Hermann, Paris, 1968.

[6] BRÖCKER, T. and T. TOM DIECK. *Representations of Compact Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics *98.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.

[7] BRYLINSKI, J.-L. Gerbes on complex reductive Lie groups. arXiv:math.DG/0002158.

[8] —— *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[9] BRYLINSKI, J.-L. and D. A. MCLAUGHLIN. The geometry of degree-four characteristic classes and of line bundles on loop spaces. I. *Duke Math. J. 75* (1994), 603–638.

[10] CHATTERJEE, D. On the construction of Abelian gerbe. Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1998.

[11] DUISTERMAAT, J. J. and J. A. C. KOLK. *Lie Groups.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] DUPONT, J. L. Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles. *Topology 15* (1976), 233–245.

[13] GAWĘDZKI, K. and N. REIS. WZW branes and gerbes. arXiv:hep-th/0205233.

[14] GOMI, K. Connections and curvings on lifting bundle gerbes. arXiv:math.DG/0107175.

[15] GUILLEMIN, V. and S. STERNBERG. *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory.* Springer-Verlag, 1999.

[16] GURUPRASAD, K., J. HUEBSCHMANN, L. JEFFREY and A. WEINSTEIN. Group systems, groupoids, and moduli spaces of parabolic bundles. *Duke Math. J. 89* (1997), 377–412.