

3. Dimension de Hausdorff

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

d'où l'on tire

$$Q_{k+\ell}(x) = P_\ell(T^k x)Q_{k-1}(x) + Q_\ell(T^k x)Q_k(x)$$

d'où l'encadrement, puisque $P_j \leq Q_j$ pour tout j ,

$$(6) \quad 1 \leq \frac{Q_{k+\ell}(x)}{Q_\ell(T^k x)Q_k(x)} \leq 2.$$

En nous souvenant que $P_j(x)$ et $Q_j(x)$ ne dépendent que des j premiers quotients partiels de x , nous avons montré

LEMME 2.3. *Si tous les a_i sont au moins égaux à 1, la différence*

$$\text{Log } Q_{k+\ell}(a_1, \dots, a_{k+\ell}) - \text{Log } Q_k(a_1, \dots, a_k) - \text{Log } Q_\ell(a_{k+1}, \dots, a_{k+\ell})$$

est en valeur absolue inférieure à $\text{Log } 2$.

3. DIMENSION DE HAUSDORFF

Les ensembles $F(\mathcal{A})$ sont tous de mesure de Lebesgue nulle, mais de dimension de Hausdorff > 0 . Good [4] a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit \mathcal{A} un ensemble fini d'entiers ≥ 0 . Soit $m \geq 1$. Soit $\alpha_{m,\mathcal{A}} > 0$ la solution en α de*

$$\sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \dots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha} = 1.$$

Alors la limite de $\alpha_{m,\mathcal{A}}$ quand m tend vers l'infini existe et vaut la dimension de Hausdorff de $F(\mathcal{A})$ muni de la métrique induite par la distance sur \mathbf{R} .

En fait, la preuve qui mène à ce résultat est très instructive. En notant

$$\Sigma_m(\alpha) = \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \dots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\alpha}$$

nous constatons en utilisant (6) que $\Sigma_{m+\ell}(\alpha) \leq \Sigma_m(\alpha)\Sigma_\ell(\alpha)$. Par ailleurs $\Sigma_m(\alpha)$ décroît en α et par conséquent, si $\Sigma_m(\alpha_1) \geq 1$, alors $\alpha_{m,\mathcal{A}} \geq \alpha_1$. Or

$$\Sigma_m(\alpha) \geq N^{-2m\alpha} F_m^{-2\alpha} |\mathcal{A}|^m$$

où F_m est le m -ième nombre de Fibonacci. Nous souhaitons donc avoir

$$-2(\text{Log } N + \frac{1}{m} \text{Log } F_m)\alpha + \text{Log } |\mathcal{A}| \geq 0$$

ce qui nous garantit que

$$\dim_{\text{h}} F(\mathcal{A}) \geq \frac{\text{Log } |\mathcal{A}|}{2(\text{Log } N + \text{Log } \frac{1+\sqrt{5}}{2})}.$$

Cette minoration nous montre en particulier que cette dimension est strictement positive.

Notons dans l'autre sens que $d = \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A}) \leq 1/2$ pour certains alphabets \mathcal{A} , par exemple $\mathcal{A} = \{1, 4\}$. Cela résulte de la remarque suivante: s'il existe des m arbitrairement grands pour lesquels $\Sigma_m(\alpha) < 1$, alors $\alpha \geq d$; dans le cas contraire, en effet, puisque $\lim_m \alpha_m = d$, $\alpha < \alpha_m$ et $\Sigma_m(\alpha) \geq \Sigma_m(\alpha_m) = 1$ pour m assez grand. Par ailleurs dès que $\Sigma_m(\alpha) < 1$ pour un m fixé, nous avons $\Sigma_{km}(\alpha) < 1$ pour tout $k \geq 1$. En prenant $m = 6$ dans l'exemple précédent, nous obtenons alors $d \leq 0.492$.

4. UNE MESURE SPÉCIALE

Dans la construction de la mesure qui nous intéresse, nous allons éliminer du support les points pour lesquels $\text{Log } Q_m$ est trop loin de sa valeur moyenne, auquel cas les deux structures considérées sur $F(\mathcal{A})$ seront vraiment similaires.

Soit $\delta < \dim_{\text{h}} F(\mathcal{A})$. Le théorème 3.1 et la définition de la dimension de Hausdorff nous assurent que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Sigma_m(\delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m \in \mathcal{A}} Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} = +\infty;$$

nous pouvons trouver m assez grand pour que $\Sigma_m(\delta) \geq 8$. Fixons provisoirement m ainsi et regardons $F(\mathcal{A})$ comme formé à partir des blocs \mathcal{A}^m .

Nous munissons le bloc \mathcal{A}^m de la mesure de probabilité discrète $\nu_m = \nu_{m,\delta}$ définie par

$$\nu_m(\{a_1, \dots, a_m\}) = Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)^{-2\delta} / \Sigma_m(\delta).$$

Soit alors $m\sigma_m(\delta)$ la moyenne de $\text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m)$ pour cette mesure. Comme

$$(7) \quad \text{Log } Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m) \geq \text{Log } Q_m(1, 1, \dots, 1) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$$

nous avons $m\sigma_m(\delta) \geq (m-1) \text{Log } \sqrt{2}$.