6. Estimation de la transformée de Fourier

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

LEMME 5.3. *Soit F une fonction C^1 sur $[0,1]$ bornée en valeur absolue par 1 et telle que $|F'(t)| \leq M$. Notons $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$. Soit ensuite λ une mesure de probabilité sur $[0,1]$ et notons par $\Lambda(u)$ le maximum des $\lambda[t, t+u]$ pour tout t dans $[0, 1-u]$. Nous avons alors pour tout $r > 0$*

$$\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda \leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}) .$$

Démonstration. Recouvrons $[0,1]$ par au plus M/r intervalles disjoints de longueur r/M. Il reste au plus un intervalle de plus petite longueur. Soit N le nombre de ces intervalles sur lesquels $\sup |F(t)| \geq 2r$. En utilisant le théorème des accroissements finis, nous constatons que $|F(t)| \geq r$ sur tous les intervalles considérés. Par conséquent

$$m_2 \geq N r^2 \frac{r}{M} .$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 |F(t)|\, d\lambda &\leq 2r + (N+1)\Lambda(r/M) \\ &\leq 2r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3}) . \qquad \square\end{aligned}$$

6. ESTIMATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Nous nous occupons ici du comportement asymptotique de

$$\hat{\mu}(u) = \int_0^1 e(ut) d\mu(t)$$

pour $|u|$ grand; nous supposerons, sans rectriction, u positif.

Commençons par rappeler que si $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ et $t = T^J(x) = [0; a_{J+1}, \ldots]$

$$\begin{aligned}[0; a_1, a_2, \ldots, a_J + t] &= \frac{P_J + tP_{J-1}}{Q_J + tQ_{J-1}} \\ &= \frac{P_J}{Q_J} + \frac{(-1)^J t}{(Q_J + tQ_{J-1})Q_J} .\end{aligned}$$

Partons donc de $J = kJ_0$ fixé: par construction, nous pouvons décomposer notre mesure μ sous la forme

$$\mu = \underbrace{\nu \times \cdots \times \nu}_{k} \times \mu := \rho_k \times \mu$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(u) &= \int_0^1 \int e\left(\frac{P_J(x)+tP_{J-1}(x)}{Q_J(x)+tQ_{J-1}(x)}u\right) d\rho_k(x)\, d\mu(t)\\ &:= \int_0^1 F(t)\, d\mu(t)\,,\end{aligned}$$

où

$$F(t) = \int e\left(\frac{P_J+tP_{J-1}}{Q_J+tQ_{J-1}}u\right) d\rho_k \tag{10}$$

à laquelle nous nous proposons d'appliquer les lemmes précédents. Puisque J est fixé, nous avons

$$Q^{1-2\varepsilon} \le Q_J \le Q^{1+2\varepsilon}\,, \quad \frac{1}{2N}Q^{1-2\varepsilon} \le Q_{J-1} \le Q^{1+2\varepsilon}\,, \tag{11}$$

avec $Q = \exp(J\sigma_m(\delta))$; mais, comme Q tend vers l'infini avec J, nous pouvons le choisir au voisinage d'un nombre fixé à l'avance, à une constante multiplicative près (constante comprise entre $\exp(J_0\sigma_m(\delta))$ et son inverse).

Nous commençons par déduire des lemmes 5.1 et 5.2 une estimation de $m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt$.

LEMME 6.1. *Si $Q^{2+4\delta} \ge u$, nous avons*

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}\,.$$

Démonstration. En développant le carré, nous obtenons

$$\int_0^1 |F(t)|^2 dt = \iiint_0^1 e\left(\left(\frac{P_J+tP_{J-1}}{Q_J+tQ_{J-1}} - \frac{P_J^*+tP_{J-1}^*}{Q_J^*+tQ_{J-1}^*}\right)u\right) dt\, d\rho_k\, d\rho_k$$

où $P_J^*, Q_J^*, \ldots$ sont des variables indépendantes de $P_J, Q_J, \ldots$ et identiquement distribuées. Notre expression se réécrit :

$$\iint e\left(\left(\frac{P_J}{Q_J} - \frac{P_J^*}{Q_J^*}\right)u\right) \int_0^1 e(f(t))\, dt\, d\rho_k\, d\rho_k$$

où l'on a posé

$$f(t) = \frac{t(-1)^J u}{(Q_J+tQ_{J-1})Q_J} - \frac{t(-1)^J u}{(Q_J^*+tQ_{J-1}^*)Q_J^*}\,. \tag{12}$$

L'argument $f(t)$ de l'exponentielle admet pour dérivée :

$$f'(t) = \left(\frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2} - \frac{1}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \right) (-1)^J u$$

soit encore

$$f'(t) = \frac{(Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*))(Q_J - Q_J^* + t(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*))}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} (-1)^J u\,,$$

qui pourra s'écrire $g(t)(\alpha t + \beta)$ avec :

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{Q_J + Q_J^* + t(Q_{J-1} + Q_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} \\ &= \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} + \frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}\,. \end{aligned}$$

Il nous faut aussi calculer

$$g'(t) = -\frac{1}{(Q_J + tQ_{J-1})^2 (Q_J^* + tQ_{J-1}^*)^2} h(t)$$

où nous avons posé

$$h(t) = Q_{J-1} + Q_{J-1}^* + \frac{2Q_{J-1}^*(Q_J + tQ_{J-1})}{(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)} + \frac{2Q_{J-1}(Q_J^* + tQ_{J-1}^*)}{(Q_J + tQ_{J-1})}\,.$$

Nous poursuivons l'estimation de

$$(13) \qquad \int_0^1 e(f(t))\,dt \quad \text{notée } \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*)$$

en discutant selon l'existence ou non d'un point stationnaire pour f, i.e. d'un point $t \in [0,1)$ tel que $f'(t) = 0$ ce qui impose $Q_{J-1} \neq Q_{J-1}^*$, et $t = -(Q_J - Q_J^*)/(Q_{J-1} - Q_{J-1}^*) \in [0,1)$.

1) Tout d'abord rappelons (voir (4)) que si $Q_{J-1} = Q_{J-1}^*$ et $Q_J = Q_J^*$, $a_i = a_i^*$ pour tout $i \leq J$; les points P_J/Q_J et P_J^*/Q_J^* sont donc confondus, et $\kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*) = 1$ d'après (12) et (13). Compte tenu du lemme 2.1 et du caractère höldérien de μ (proposition 4.1 a)), la contribution de ce terme dans le calcul de la transformée de Fourier sera au plus

$$\begin{aligned} \iint_{\{Q_J = Q_J^*, Q_{J-1} = Q_{J-1}^*\}} & \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q_J^*, Q_{J-1}^*)\, d\rho_k\, d\rho_k \\ & \leq \int \rho_k\Big(\Big[\frac{P_J}{Q_J} - \frac{N^2}{Q_J^2}, \frac{P_J}{Q_J} + \frac{N^2}{Q_J^2}\Big]\Big) d\rho_k \\ & \ll \frac{1}{Q^{2\delta - \delta\varepsilon}}\,. \end{aligned}$$

2 a) Supposons qu'il y ait un point stationnaire (en particulier $Q_{J-1} \neq Q^*_{J-1}$); alors le lemme 5.2 donne

$$\kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q^*_J, Q^*_{J-1}) \ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|u}}. \tag{14}$$

En effet, avec les notations du lemme 5.2,

$$|g(t)| \geq a = \frac{1}{4}Q^{-3-6\varepsilon},$$

et

$$|g'(t)| \leq 10Q^{-3+14\varepsilon} = b;$$

l'estimation suit en se rappelant que

$$|\alpha| = |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|u.$$

b) Supposons maintenant plus généralement que $1 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H_0$ et $|(Q_J - Q^*_J)/(Q_{J-1} - Q^*_{J-1})| \leq 2$; si H décrit les entiers de la forme 2^j entre 1 et H_0, cet ensemble est approximativement la réunion sur j des ensembles

$$2^{j-1} \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq 2^j, \quad |Q_J - Q^*_J| \leq 2|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|.$$

En posant $H = 2^j$,

$$\{H/2 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}|\} \\ \subset \{H/2 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ |Q_J - Q^*_J| \leq 2H\},$$

de sorte que

$$\iint_{\{H/2\leq|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\leq H,\ |Q_J-Q^*_J|\leq 2|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\}} d\rho_k\, d\rho_k \\ \ll \iint_{\{H/2\leq|P_J-P^*_J|\leq H,\ |Q_J-Q^*_J|\leq 2H\}} d\rho_k\, d\rho_k$$

en utilisant l'invariance de la mesure ρ_k par la transformation $(a_1, \dots, a_J) \to (a_J, \dots, a_1)$ (proposition 4.1 b)) ainsi que (2) et (3).

Or les hypothèses $H/2 \leq |P_J - P^*_J| \leq H$, $|Q_J - Q^*_J| \leq 2H$ impliquent clairement,

$$\left|\frac{P_J}{Q_J} - \frac{P^*_J}{Q^*_J}\right| \leq \frac{|P_J - P^*_J|}{Q_J} + \frac{|Q_J - Q^*_J|P^*_J}{Q_JQ^*_J} \ll \frac{H}{Q^{1-2\varepsilon}};$$

donc, si nous conservons dans ce cas les estimations 14 de κ obtenues dans le cas a) d'existence d'un point stationnaire, nous obtenons une contribution de l'ordre de

$$\iint_{\{H/2\le|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\le H,\ |Q_J-Q^*_J|\le 2|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\}} \kappa(Q_J,Q_{J-1},Q^*_J,Q^*_{J-1})\, d\rho_k d\rho_k$$
$$\ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}} \iint_{\left|\frac{P_J}{Q_J}-\frac{P^*_J}{Q^*_J}\right|\le H/Q} d\rho_k d\rho_k$$
$$\ll \frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{\sqrt{Hu}} (H/Q)^\delta$$

en se souvenant de la propriété höldérienne de μ (proposition 4.1 a)).

En sommant sur j, nous trouvons pour l'ensemble

$$\{1 \le |Q_{J-1}-Q^*_{J-1}| \le H_0,\ |Q_J - Q^*_J| \le 2|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|\}$$

une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}}{Q^\delta\sqrt{u}} H_0^{\delta-1/2}.$$

c) Si $|Q_{J-1}-Q^*_{J-1}| \ge H_0$ cette fois, le même lemme fournit une contribution de l'ordre de

$$Q^{\frac{3}{2}+23\varepsilon}/\sqrt{H_0 u}.$$

3 a) Si $Q_{J-1} \ne Q^*_{J-1}$ et $|(Q_J-Q^*_J)/(Q_{J-1}-Q^*_{J-1})| \ge 2$, il n'y a pas de point stationnaire et nous sommes dans les conditions d'application du lemme 5.1 qui nous donne la majoration

$$\kappa(Q_J,Q_{J-1},Q^*_J,Q^*_{J-1}) \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{(|Q_J-Q^*_J| + |Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|)u}. \tag{15}$$

En effet il résulte des calculs précédents, en reprenant la minoration de $|g(t)|$, que

$$|f'(t)| \ge |\beta||g(t)| \gg uQ^{-3-6\varepsilon}|Q_J - Q^*_J|$$

et en dérivant $f'(t) = (\alpha t+\beta)g(t)$ nous déduisons

$$\begin{aligned}|f''(t)| &\le |\alpha||g(t)| + (|\alpha|+|\beta|)|g'(t)| \\ &\ll Q^{-3-6\varepsilon}|Q_J-Q^*_J|u + Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J-Q^*_J| + |Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|)u \\ &\ll Q^{-3+14\varepsilon}(|Q_J-Q^*_J| + |Q_{J-1}-Q^*_{J-1}|)u,\end{aligned}$$

d'où la majoration annoncée.

Le cas $\left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \geq H_0$ ayant été pris en compte à l'étape précédente, il suffit de considérer l'ensemble $1 \leq \left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \leq H_0$, $\left|(Q_J - Q^*_J)/(Q_{J-1} - Q^*_{J-1})\right| \geq 2$ et la discussion se poursuit ainsi :

b) Supposons $1 \leq \left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \leq H_0$ et $|Q_J - Q^*_J| \geq 2H_0$; la majoration du lemme 5.1 nous donne une contribution de

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0 u}.$$

c) Supposons $|Q_J - Q^*_J| \leq 2H_0$ (ce qui implique $1 \leq \left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \leq H_0$); cet ensemble se décrit comme la réunion sur j, avec $1 \leq 2^j \leq H_0$, des ensembles

$$\left\{\left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \leq 2^j,\ 2^j \leq |Q_J - Q^*_J| \leq 2^{j+1}\right\}.$$

Utilisons alors les estimations (15) de κ, établies dans le cas a) sans point stationnaire, nous obtenons par des arguments similaires

$$\begin{aligned}
\iint_{\{1 \leq |Q_{J-1} - Q^*_{J-1}| \leq H,\ H \leq |Q_J - Q^*_J| \leq 2H\}} & \kappa(Q_J, Q_{J-1}, Q^*_J, Q^*_{J-1})\, d\rho_k d\rho_k \\
& \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} \iint_{\{1 \leq |P_J - P^*_J| \leq H,\ H \leq |Q_J - Q^*_J| \leq 2H\}} d\rho_k d\rho_k \\
& \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} \iint_{\left|\frac{P_J}{Q_J} - \frac{P^*_J}{Q^*_J}\right| \leq H/Q} d\rho_k d\rho_k \\
& \ll \frac{Q^{3+26\varepsilon}}{Hu} (H/Q)^\delta .
\end{aligned}$$

En sommant sur j, nous trouvons pour l'ensemble

$$\left\{1 \leq \left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right| \leq H_0,\ |Q_J - Q^*_J| \geq 2\left|Q_{J-1} - Q^*_{J-1}\right|\right\}$$

une contribution totale d'au plus

$$\frac{Q^{3+26\varepsilon}}{H_0^{1-\delta} Q^\delta u}.$$

Il s'agit en fait essentiellement du carré de la quantité précédente. Comme notre intégrale est inférieure à 1, nous pouvons négliger ce terme (aux $Q^{26\varepsilon}$ près).

4) Enfin la dernière contribution qu'il faille ajouter vient du cas $Q_{J-1} = Q^*_{J-1}$ mais $Q_J \neq Q^*_J$; il se traite comme le cas 3) précédent et fournit un terme majorant du même ordre de grandeur.

Nous sommes en mesure de terminer la preuve du lemme: le choix optimal dans l'estimation est donné par $H_0 = Q$; en négligeant la contribution des cas 3) et 4), cela nous donne

$$m_2 = \int_0^1 |F(t)|^2 dt \ll_N \frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}$$

comme attendu. □

Pour estimer $\hat{\mu}(u) = \int_0^1 F(t)\, d\mu(t)$, nous pouvons maintenant utiliser le lemme 5.3 avec la fonction F et la mesure μ : par construction, la fonction de répartition de μ est höldérienne d'exposant δ et $M = 2\pi Q^{-2+4\varepsilon}u$ convient. Pour tout $r > 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(u)| &\ll r + \Lambda(r/M)(1 + m_2 M r^{-3})\\ &\ll r + r^\delta Q^{2\delta} u^{-\delta} + \frac{Q^{2\delta-2+4\varepsilon}u^{1-\delta}}{r^{3-\delta}}\Big(\frac{Q^{1+26\varepsilon}}{\sqrt{u}} + \frac{Q^{\delta\varepsilon}}{Q^{2\delta}}\Big).\end{aligned}$$

Nous choisissons Q de façon à égaliser les deux termes de l'estimation de m_2, ce qui revient à prendre $Q^{2+4\delta}$ de l'ordre de u ; comme nous l'avons remarqué en effet, nous pouvons, u étant fixé, choisir $J = kJ_0$ suffisamment grand, i.e. k suffisamment grand, pour rendre Q proche de $u^{\frac{1}{2+4\delta}}$: il suffit de prendre

$$k = \left[\frac{\log u}{(2+4\delta)\sigma_m J_0}\right]$$

pour avoir

$$Q^{2+4\delta} = e^{(\sigma_m kJ)(2+4\delta)} \leq u \leq Q^{2+4\delta} e^{(\sigma_m J_0)(2+4\delta)}.$$

Il en résulte

$$|\hat{\mu}(u)| \ll r + r^\delta u^{\delta/(1+2\delta)} u^{-\delta} + u^{\delta/(1+2\delta)} u^{1-\delta} r^{\delta-3} u^{(-\delta+13\varepsilon)/(1+2\delta)} \tag{16}$$

$$\ll r + r^\delta u^{-2\delta^2/(1+2\delta)} + u^{(\delta-2\delta^2+15\varepsilon)/(1+2\delta)} r^{\delta-3}. \tag{17}$$

Il reste à optimiser en $r < 1$. Choisissons-le de façon à égaliser les deux termes extrêmes qui sont dominants. En ignorant ε, cela revient à prendre r tel que

$$r = r^{\delta-3} u^{(\delta-2\delta^2)/(1+2\delta)}$$

ou encore

$$r = u^\eta \quad \text{avec } \eta = \frac{\delta - 2\delta^2}{(4-\delta)(1+2\delta)}$$

ce qui est licite si l'on suppose $\delta > 1/2$. En reportant dans (17), il vient

$$|\hat{\mu}(u)| \ll u^\eta + u^{-7\delta^2/[(4-\delta)(1+2\delta)]} + u^\eta u^{15\varepsilon/(1+2\delta)} \ll u^{\eta+8\varepsilon},$$

car le second terme est négligeable.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.4.

7. Une question de Montgomery

Montgomery a posé dans [12] la question suivante (problème 45):

Existe-t-il un nombre normal à quotients partiels bornés ?

DÉFINITION 7.1. Un nombre $x \in [0,1)$ est normal en base q où q est un entier $q \geq 2$ si et seulement si la suite $(q^n x)$ est équirépartie modulo 1, ce qui, via le critère de Weyl, s'écrit:

$$\forall k \neq 0, \ \lim_N \frac{1}{N} \sum_{n<N} e(kq^n x) = 0.$$

Le théorème de Borel établit que si $q \geq 2$, presque tout nombre (au sens de la mesure de Lebesgue) est normal en base q. C'est le théorème ergodique appliqué à la transformation $x \in [0,1) \to qx \bmod 1$. Qu'en est-il en restriction à un sous-ensemble de nombres irrationnels de $[0,1)$? Un outil est le suivant:

THÉORÈME 7.2 (Davenport-Erdős-LeVeque). *Soit (s_n) une suite d'entiers et soit μ une mesure de probabilité portée par $[0,1)$ telle que*

$$\sum_{N\geq 1} \frac{1}{N^3} \sum_{m,n=1}^{N} \hat{\mu}(k(s_n - s_m)) < \infty,$$

pour tout entier $k \neq 0$, alors pour μ-presque tout $x \in [0,1)$, la suite $(s_n x)$ est équirépartie modulo 1.

Démonstration. Fixons $k \neq 0$. Notons $S_{N,k}(x) = \frac{1}{N}\sum_{n<N} e(ks_n x)$, et $I_{N,k} = \int |S_{N,k}(x)|^2 d\mu(x)$. L'hypothèse n'est autre que

$$\sum_{N\geq 1} \frac{I_{N,k}}{N} < +\infty, \quad \forall k \neq 0.$$

Nous utilisons un lemme classique sur les séries: