Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 49 (2003)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS

Kapitel: 8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Autor: Queffélec, Martine / Ramaré, Olivier

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-66692

$$\sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1}(m-n)^{-\delta} = \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=1}^{m-1} n^{-\delta}$$
$$\leq N\sum_{n=1}^{N-1} n^{-\delta} = O(N^{2-\delta}).$$

Finalement $\sum_{N\geq 1}\frac{1}{N^3}\sum_{m,n=1}^{N}|\hat{\mu}(k(s_n - s_m))| < \infty$ puisque $\delta > 0$. □

Nous en déduisons le résultat suivant qui contient celui de Baker:

COROLLAIRE 7.5. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 1 contenant au moins deux éléments; il existe une infinité de $x \in F(\mathcal{A})$ normal en toute base dès que la dimension de Hausdorff de $F(\mathcal{A})$ est $> 1/2$.*

Démonstration. Soit $1/2 < \delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$, $0 < \varepsilon < \frac{\delta(2\delta-1)}{8(2\delta+1)(4-\delta)}$ et q un entier ≥ 2. Il résulte du corollaire 7.4 appliqué avec $s_n = q^n$ et $\mu = \mu_{\varepsilon,\delta}$ la mesure de Kaufman portée par $F(\mathcal{A})$, donnée par le théorème 1.4, que l'ensemble

$$\mathcal{N}_q = \{x \in F(\mathcal{A}) \ \text{ normal en base } q\}$$

est de mesure pleine pour la mesure de probabilité μ. Ainsi $\mu(\bigcap_{q\geq 2}\mathcal{N}_q) = 1$ d'où le corollaire. □

8. COMMENTAIRES ET QUESTIONS

Les mesures de Kaufman ainsi construites possèdent deux propriétés importantes: le comportement höldérien de la fonction de répartition et le comportement asymptotique précis de la transformée de Fourier. En fait la seconde propriété, fondamentale ici, découle en partie de la première, mais le comportement höldérien joue un rôle primordial dans l'approche de la conjecture de Littlewood par Pollington & Velani [14].

Les ensembles $F(\mathcal{A})$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, sont donc des ensembles de multiplicité stricte, lorsqu'ils possèdent une dimension de Hausdorff $> 1/2$. On peut se demander si la borne $1/2$ est infranchissable ou si elle relève au contraire de la construction. La propriété pour un ensemble d'être de multiplicité peut paraître stable: un résultat fameux de Salem & Zygmund (voir [10]) établit, pour des ensembles de type Cantor à rapport de dissection ξ, l'équivalence:

$$E \text{ est de multiplicité} \iff \frac{1}{\xi} \notin S$$

où S est l'ensemble des nombres de Pisot. L'ensemble S étant fermé, la propriété est stable pour les petites variations de ξ. Qu'en est-il pour les ensembles du type $F(\mathcal{A})$? Ceci amène naturellement les questions :

QUESTIONS. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 1 tel que $|\mathcal{A}| \geq 2$ et $\dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) = d$.

1. $F(\mathcal{A})$ est-il encore de multiplicité ?
2. $F(\mathcal{A})$ porte-t-il une mesure dont la décroissance à l'infini est en $\mathcal{O}\big(1/(\log|n|)^{\delta}\big)$ pour un $\delta > 1$?

Le lien entre la dimension de Hausdorff et la propriété de multiplicité n'est pas clairement établie puisque des ensembles de dimension de Hausdorff positive, tel l'ensemble triadique de Cantor, sont annulés par toute mesure de M_0 ([10]) tandis que certains autres, de dimension nulle, sont de multiplicité, ce qui est assez frappant ([2], [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER, R. C. Non publié, cf. référence [12] ci-dessous, problème numéro 45.

[2] BLUHM, C. E. Liouville numbers, Rajchman measures, and small Cantor sets. *Proc. Amer. Math. Soc. 128* (2000), 2637–2640.

[3] BUGEAUD, Y. Nombres de Liouville et nombres normaux. Preprint, 2002.

[4] GOOD, I. J. The fractional dimensional theory of continued fractions. *Proc. Cambridge Philos. Soc. 37* (1941), 199–228.

[5] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An Introduction to the Theory of Numbers.* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[6] HENSLEY, D. The Hausdorff dimensions of some continued fraction Cantor sets. *J. Number Theory 33* (1989), 182–198.

[7] IVASHEV-MUSATOV, O. S. M-Mengen und h-Maße. *Mat. Zametki 3* (1968), 441–447.

[8] KAUFMAN, R. Continued fractions and Fourier transforms. *Mathematika 27* (1980), 262–267.

[9] KAHANE, J. P. and R. SALEM. Distribution modulo 1 and sets of uniqueness. *Bull. Amer. Math. Soc. 70* (1964), 259–261.

[10] KAHANE, J. P. et R. SALEM. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Hermann, nouvelle édition, 1994.

[11] LYONS, R. The measure of non-normal sets. *Invent. math. 83* (1986), 605–616.

[12] MONTGOMERY, H. L. *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis.* CBMS regional conf. series in math. *84*, A.M.S., Providence, RI, 1994.