

# 1.6 The ring of differential operators on $X_m$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

From this we deduce

THEOREM 1.14 ([EG2, BEG, FeV], conjectured in [FV]). *The ring  $Q_m$  of  $m$ -quasi-invariants is Gorenstein.*

*Proof.* By Stanley's theorem (see [Eis]), a positively graded Cohen-Macaulay domain  $A$  is Gorenstein iff its Poincaré series is a rational function  $h(t)$  satisfying the equation  $h(t^{-1}) = (-1)^n t^l h(t)$ , where  $l$  is an integer and  $n$  is the dimension of the spectrum of  $A$ . Thus the result follows immediately from Proposition 1.13.  $\square$

## 1.6 THE RING OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON $X_m$

Finally, let us introduce the ring  $\mathcal{D}(X_m)$  of differential operators on  $X_m$ , that is the ring of differential operators with coefficients in  $\mathbf{C}(\mathfrak{h})$  mapping  $Q_m$  to  $Q_m$ . It is clear that this definition coincides with Grothendieck's well-known definition ([Bj]).

THEOREM 1.15 ([BEG]).  *$\mathcal{D}(X_m)$  is a simple algebra.*

REMARK 1.16. a) The ring of differential operators on a smooth affine algebraic variety is always simple (see [Bj], Chapter 3).

b) By a result of M. van den Bergh [VdB], for a non-smooth variety, the simplicity of the ring of differential operators implies the Cohen-Macaulay property of this variety.

## 2. LECTURE 2

We will now see how the ring  $Q_m$  appears in the theory of completely integrable systems.

### 2.1 HAMILTONIAN MECHANICS AND INTEGRABLE SYSTEMS

Recall the basic setup of Hamiltonian mechanics [Ar]. Consider a mechanical system with configuration space  $X$  (a smooth manifold). Then the phase space of this system is  $T^*X$ , the cotangent bundle on  $X$ . The space  $T^*X$  is naturally a symplectic manifold, and in particular we have an operation of Poisson bracket on functions on  $T^*X$ . A point of  $T^*X$  is a pair  $(x, p)$ , where  $x \in X$  is the position and  $p \in T_x^*X$  is the momentum. Such pairs are