

## 2.3 The quantum Calogero-Moser System

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

The Calogero-Moser system has a generalization to arbitrary Coxeter groups. Namely, consider a finite group  $W$  generated by reflections acting on the space  $\mathfrak{h}$ , and keep the notation of the previous section. Fix a  $W$ -invariant nondegenerate scalar product  $(-, -)$  on  $\mathfrak{h}$ . It determines a scalar product on  $\mathfrak{h}^*$ . Define the “energy function”

$$E(x, p) = \frac{(p, p)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{s \in \Sigma} \frac{\gamma_s(\alpha_s, \alpha_s)}{\alpha_s(x)^2}, \quad x \in \mathfrak{h}, \quad p \in \mathfrak{h}^*$$

on  $T^*\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$ , where  $\gamma: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}$  is a  $W$ -invariant function. Notice that although  $\alpha_s$  is defined up to a non zero constant, by homogeneity,  $E$  is independent of the choice of  $\alpha_s$ . We will call the system defined by  $E$  the Calogero-Moser system for  $W$ .

If  $W$  is the symmetric group  $S_n$ ,  $\mathfrak{h} = \mathbf{C}^n$ , then  $\Sigma$  is the set of transpositions  $s_{i,j}$ ,  $i < j$ , and we can take  $\alpha_s = e_i - e_j$ . Then we clearly obtain the usual Calogero-Moser system.

Below we will see that the Calogero-Moser system for  $W$  is completely integrable.

### 2.3 THE QUANTUM CALOGERO-MOSER SYSTEM

Let us now discuss quantization of the Calogero-Moser system. We start by quantizing the energy  $E$  by formally making the substitution

$$p_j \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j},$$

where  $\hbar$  is a parameter (Planck's constant). This yields the Schrödinger operator

$$\widehat{E} := -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \frac{1}{2} \sum_{s \in \Sigma} \frac{\gamma_s(\alpha_s, \alpha_s)}{\alpha_s^2},$$

where  $\Delta$  denotes the Laplacian.

In particular, in the case of  $W = S_n$  we have

$$\widehat{E} = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + \sum_{i < j} \frac{c}{(x_i - x_j)^2},$$

where  $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ . Setting  $\beta_s = \frac{\gamma_s}{2\hbar^2}$ , we will from now on consider the operator

$$H := -\frac{2}{\hbar^2} \widehat{E} = \Delta - \sum_{s \in \Sigma} \frac{\beta_s(\alpha_s, \alpha_s)}{\alpha_s^2(x)},$$

called the Calogero-Moser operator.

We want to study the stationary Schrödinger equation:

$$(3) \quad H\psi = \lambda\psi, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

As in the classical case, it is difficult to say anything explicit about solutions of this equation for a general Schrödinger operator  $H$ , but for the Calogero-Moser operator the situation is much better.

DEFINITION 2.1. A *quantum integral* of  $H$  is a differential operator  $M$  such that

$$[M, H] = 0.$$

We are going to show that there are many quantum integrals of  $H$ , namely that there are  $n$  commuting algebraically independent quantum integrals  $M_1, \dots, M_n$  of  $H$ . By definition, this means that the quantum Calogero-Moser system is completely integrable.

Once we have found  $M_1, \dots, M_n$ , observe that for fixed constants  $\mu_1, \dots, \mu_n$ , the space of solutions of the system

$$\begin{cases} M_1\psi = \mu_1\psi \\ \dots\dots\dots \\ M_n\psi = \mu_n\psi \end{cases}$$

is clearly stable under  $H$ . We will see that this space is in fact finite dimensional. Therefore, the operators  $M_i$  allow one to reduce the problem of solving the partial differential equation  $H\psi = \lambda\psi$  to that of solving a system of ordinary linear differential equations. This phenomenon is called quantum complete integrability.

#### 2.4 THE ALGEBRA OF DIFFERENTIAL-REFLECTION OPERATORS .

We are now going to explain how to find quantum integrals for  $H$ , using the Dunkl-Cherednik method.

First let us fix some notation. Given a smooth affine variety  $X$ , we will denote by  $\mathcal{D}(X)$  the ring of differential operators on  $X$ . We are going to consider the case in which  $X$  is the open set  $U$  in  $\mathfrak{h}$  which is the complement of the divisor of the equation  $\delta(x) := \prod_{s \in \Sigma} \alpha_s(x)$ . Clearly  $\mathcal{D}(U) = \mathcal{D}(\mathfrak{h})[1/\delta(x)]$ .

LEMMA 2.2. An element of  $\mathcal{D}(U)$  is completely determined by its action on  $\mathbf{C}[U]^W = \mathbf{C}[U/W]$ .