

# 3. Hilbert modules

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. HILBERT MODULES

Recall that for  $H < G$  and  $X$  an  $H$ -space, the *induced*  $G$ -space is

$$G \times_H X = (G \times X)/H$$

where  $H$  acts on  $G \times X$  via  $h \cdot (g, x) = (gh^{-1}, hx)$  and the left  $G$ -action on  $G \times_H X$  is given by  $g \cdot [k, x] = [gk, x]$  (where  $[k, x]$  denotes the class of the pair  $(k, x) \in G \times X$  in  $G \times_H X$ ). For  $A \subseteq \ell^2(H)^n$  a Hilbert  $H$ -module one defines  $\text{Ind}_H^G(A)$ , the *induced* Hilbert  $G$ -module, as follows:

$$\text{Ind}_H^G(A) = \left\{ f: G \rightarrow A, \quad f(gh) = h^{-1}f(g), \quad \sum_{\gamma \in G/H} \|f(\gamma)\|^2 < \infty \right\}.$$

On  $\text{Ind}_H^G(A)$  the action of  $G$  is given as follows:

$$(\gamma \cdot f)(\mu) = f(\gamma^{-1}\mu), \quad \gamma, \mu \in G \quad \text{and} \quad f \in \text{Ind}_H^G(A).$$

For  $\tilde{M}$  an  $H$ -free, cocompact Riemannian manifold and  $\tilde{D}$  an  $H$ -equivariant pseudo-differential operator on  $\tilde{M}$ , one can express the lift  $\bar{D}$  of  $\tilde{D}$  to  $\bar{M} = G \times_H \tilde{M}$  as follows. Fix a set  $R$  of representatives for  $G/H$  and write  $\pi: \bar{M} \rightarrow \tilde{M}$  for the projection; a section  $\bar{s} \in C_c^\infty(\bar{M}, \pi^*E)$  is a collection

$$\bar{s} = \{\tilde{s}_r\}_{r \in R},$$

where  $\tilde{s}_r \in C_c^\infty(\tilde{M}, E)$  is the zero section for all but finitely many  $r$ 's, and  $\bar{s}([g, \tilde{m}]) = \tilde{s}_r(h\tilde{m})$ , if  $[r, h\tilde{m}] = [g, \tilde{m}] \in G \times_H \tilde{M}$ . Now the lift  $\bar{D}$  of  $\tilde{D}$  to  $\bar{M} = G \times_H \tilde{M}$  satisfies

$$\bar{D}\bar{s} = \left\{ \tilde{D}\tilde{s}_r \right\}_{r \in R}.$$

LEMMA 3.1. *Let  $M$  be a closed Riemannian manifold,  $D$  a pseudo-differential operator on  $M$  and  $\tilde{M}$  a regular cover of  $M$  with countable transformation group  $H$ . Consider an inclusion  $H < G$  and form the regular cover  $\bar{M} = G \times_H \tilde{M}$  of  $M$ . Then for the lifts  $\tilde{D}$  of  $D$  to  $\tilde{M}$  and  $\bar{D}$  of  $\tilde{D}$  to  $\bar{M}$ ,*

$$\text{Index}_H(\tilde{D}) = \text{Index}_G(\bar{D}).$$

*Proof.* It is enough to see that  $S_{\bar{D}} \cong \text{Ind}_H^G(S_{\tilde{D}})$ . Indeed, it is well-known (see [9]) that for a Hilbert  $H$ -module  $A$  one has

$$\dim_H(A) = \dim_G(\text{Ind}_H^G(A)).$$

For  $R$  a fixed set of representatives for  $G/H$ , the map

$$\begin{aligned} \varphi_R: \text{Ind}_H^G(S_{\tilde{D}}) &\rightarrow S_{\tilde{D}} \\ f &\mapsto \{f(r)\}_{r \in R} \end{aligned}$$

is well-defined by  $H$ -equivariance of the elements of  $S_{\tilde{D}}$  and one checks that it defines a  $G$ -equivariant isometric bijection. Similarly for the adjoint operators.

The following example is a particular case of the previous lemma.

EXAMPLE 3.2. Let us look at the case  $\tilde{M} = M \times G$ . A section  $\tilde{s} \in C_c^\infty(\tilde{M}, \pi^*E)$  is an element  $\tilde{s} = \{s_g\}_{g \in G}$  where  $s_g \in C^\infty(M, E)$  and  $s_g = 0$  for all but finitely many  $g$ 's. Note that  $L^2(\tilde{M}, \pi^*E)$  can be identified with  $\ell^2(G) \otimes L^2(M, E)$ . Now

$$\tilde{D}\tilde{s} = \{Ds_g\}_{g \in G} \in C_c^\infty(\tilde{M}, \pi^*F)$$

and hence  $S_{\tilde{D}}$  may be identified with  $\ell^2(G) \otimes S_D \cong \ell^2(G)^d$ , where  $d = \dim_{\mathbb{C}}(S_D)$ . In this identification the projection  $P$  onto  $S_{\tilde{D}}$  becomes the identity in  $M_d(\mathcal{N}(G))$  and thus

$$\dim_G(S_{\tilde{D}}) = \sum_{i=1}^d \langle e, e \rangle = d = \dim_{\mathbb{C}}(S_D).$$

A similar argument for  $D^*$  shows that in this case not only does the  $L^2$ -Index of  $\tilde{D}$  coincide with the Index of  $D$ , but also the individual terms of the difference correspond to each other. This is not the case in general, see Example 2.2.

#### 4. ON $K$ -HOMOLOGY

Many ideas of this section go back to the seminal article by Baum and Connes [3], which has been circulating for many years and has only recently been published.

An elliptic pseudo-differential operator  $D$  on the closed manifold  $M$  can also be used to define an element  $[D] \in K_0(M)$ , the  $K$ -homology of  $M$ , and according to Baum and Douglas [4], all elements of  $K_0(M)$  are of the form  $[D]$ . The index defined in Section 2 extends to a well-defined