1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 49 (2003), p. 95–100

UNE PREUVE DU THÉORÈME DE LIOUVILLE EN GÉOMÉTRIE CONFORME DANS LE CAS ANALYTIQUE

par Charles FRANCES

1. INTRODUCTION

Le théorème de Liouville est un résultat fondamental de géométrie conforme, que l'on peut énoncer comme suit :

THÉORÈME 1 (Liouville). *Une application conforme entre ouverts de* $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ *est obtenue comme restriction d'une composée de similitudes et d'inversions.*

On obtient comme corollaire que tout difféomorphisme conforme entre deux ouverts de la sphère $\mathbf{S}^n$ est la restriction d'un (unique) difféomorphisme conforme *global* de $\mathbf{S}^n$. Ce résultat peut aussi se voir comme une manifestation particulière d'un phénomène général : la rigidité des applications conformes en dimension supérieure ou égale à trois (une exposition très générale de ces propriétés de rigidité est donnée dans [St]). On dispose de nombreuses démonstrations du théorème de Liouville (voir entre autres [Sp], [J] ou [M]) et dans la plupart des cas, elles s'articulent en deux parties. On commence par montrer que si un difféomorphisme f entre ouverts de $\mathbf{R}^n$ est conforme, il envoie localement les $(n-1)$-sphères sur des $(n-1)$-sphères (cela signifie que tout point du domaine de définition de f possède un voisinage tel que toute $(n-1)$-sphère incluse dans ce voisinage est envoyée par f sur une $(n-1)$-sphère). Une fois ce fait établi, on conclut de façon classique grâce à un lemme dû à Möbius.

LEMME 2 (Möbius). *Si une application* f *entre deux ouverts* U *et* V *de* $\mathbf{R}^n$ *envoie localement les* $(n-1)$*-sphères de* U *sur des* $(n-1)$*-sphères de* V*, alors* f *est la restriction à* U *d'une composée de similitudes et d'inversions.*

Nous renvoyons à [Sp] (vol. 3, p. 310) pour une preuve de ce lemme.

Précisons que le cœur de la démonstration du théorème de Liouville réside vraiment dans la première étape, consistant à prouver qu'un difféomorphisme conforme envoie localement les $(n-1)$-sphères sur des $(n-1)$-sphères. Ce résultat est généralement obtenu par des calculs et il est difficile d'isoler une raison conceptuelle pour laquelle il est vrai. Aussi se propose-t-on de faire le lien entre cette propriété et un résultat profond mais *a priori* sans rapport : l'invariance conforme des géodésiques isotropes en géométrie pseudo-riemannienne ou riemannienne complexe.

Notre preuve s'applique à des transformations conformes analytiques entre ouverts de $\mathbf{R}^n$. Les preuves classiques (par exemple [M]) requièrent en général une régularité C^3 et on peut trouver dans [H] une preuve plus difficile qui traite le cas des applications de classe C^1.

2. Invariance conforme des géodésiques isotropes

Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne g sur une variété M est la donnée d'une forme quadratique non dégénérée de signature (p,q) sur chaque espace tangent à M. Nous supposons par la suite que g n'est pas riemannienne, c'est-à-dire que ni p ni q ne sont nuls.

Une géodésique $t \mapsto c(t)$ pour la métrique g est qualifiée d'isotrope si pour tout t où $c(t)$ est défini, on a $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 0$. Si l'on se donne une métrique g' dans la classe conforme de g (c'est à dire $g' = e^\sigma g$ pour σ une fonction de M dans $\mathbf{R}$ de même régularité que g), les géodésiques de g' et de g n'ont en général aucun rapport. Néanmoins, on peut montrer le

THÉORÈME 3. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne; alors les géodésiques isotropes sont les mêmes, en tant que lieux géométriques, pour toutes les métriques de la classe conforme de g.*

Remarquons que ce théorème ne dit pas que les géodésiques isotropes sont les mêmes en tant que courbes paramétrées.

Preuve. Nous rappelons sommairement comment on peut voir le flot géodésique sur une variété comme un flot hamiltonien (le lecteur souhaitant plus de détails peut se référer à [AM]). On note $T^\star M$ le fibré cotangent de M et ω la forme symplectique standard sur $T^\star M$. La donnée d'une